Meavilla Seguí, V. & Oller-Marcén, A. M. (2018). Aritmética para comerciantes y mercaderes en el Aragón del siglo XVIII: metrología en la *Arithmetica especulativa y practica* (1762) del jesuita Joseph Biel. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 11(3), 55-73.

Artículo recibido el 2 de marzo de 2017; Aceptado para publicación el 25 de agosto de 2018

Aritmética para comerciantes y mercaderes en el Aragón del siglo XVIII: metrología en la *Arithmetica especulativa y practica* (1762) del jesuita Joseph Biel

Arithmetic for traders and merchants in Aragón during XVIII century: metrology in the *Arithmetica especulativa y practica* (1762) by the jesuit Joseph Biel

Vicente Meavilla Seguí [1]
Antonio M. Oller-Marcén [2]

Resumen

Hasta que el Sistema Métrico Decimal no se adoptó de forma universal, la mayoría de los manuales dedicados a la enseñanza de las matemáticas elementales incluían capítulos consagrados a las equivalencias entre las monedas, pesos y medidas de las distintas regiones de un mismo país o de los diferentes países. Obviamente, el objetivo de estos capítulos era el de facilitar las transacciones comerciales entre las distintas comarcas y regiones. En este artículo presentamos los contenidos de carácter metrológico, restringidos al ámbito geográfico de Aragón, incluidos en la *Arithmetica especulativa, y practica* (1762) de Joseph Biel. Además de su innegable interés histórico, dicha información puede resultar útil para la enseñanza.

Palabras clave: Metrología, Aragón, Joseph Biel, Educación Matemática, Siglo XVIII.

Abstract

Until de universal adoption of the Decimal Metric System, most of the textbooks devoted to the teaching of elementary mathematics included some chapters dealing with equivalences among the currency, weihgts and measures of different regions within a country or of different countries. Obviously, the goal of these chapters was to facilitate the commercial transactions between these different regions and countries. In this paper, we present the metrological contents included in the *Arithmetica especulativa, y practica* (1762) by Joseph Biel. In addition to its undeniable historical interest, this information can be useful for teaching. Además de su innegable interés histórico, dicha información puede resultar útil para la enseñanza.

Keywords: Metrology, Aragón, Joseph Biel, Mathematics Education, XVIII century.

[1] Doctor en Filosofía (Pedagogía). Catedrático de Enseñanza Secundaria jubilado. Teruel, España. Email: vmeavill@hotmail.com
[2] Doctor en Didáctica de la Matemática. Profesor del Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza. Zaragoza, España. Email: oller@unizar.es

1. INTRODUCCIÓN

Actualmente es un hecho aceptado que las matemáticas, como actividad humana, no pueden ser concebidas al margen de la cultura en que se desarrollan (Bishop, 1988). Según D'Ambrosio (1990), para entender qué matemáticas tienen lugar en una determinada sociedad es necesario analizar los problemas determinados que motiva la creación de esas herramientas matemáticas concretas. Dado que, generalmente, estos problemas están íntimamente relacionados con aspectos culturales, este programa de investigación ha dado en llamarse etnomatemática.

Como señala el propio D'Ambrosio (1996, p. 245), "la etnomatemática está muy cercana a la historia de las matemáticas". De hecho, Jankvist (2009) pone de manifiesto que el uso de la historia de las matemáticas en el aula permite a los estudiantes apreciar el carácter cultural de las matemáticas. En particular, el uso de fuentes originales es un importante recurso a la hora de trabajar en el aula de matemáticas (Jahnke, Arcavi, Barbin, Bekken, Furinghetti, El Idrissi, Silva da Silva y Weeks, 2000). Desde un punto de vista cultural, los libros dedicados a la enseñanza son un interesante objeto de estudio puesto que, como Maz y Rico (2015, p. 54) ponen de manifiesto: "el análisis de textos escolares proporciona información sobre los contenidos, los conocimientos tratados y también sobre aspectos pedagógicos, curriculares o sociales".

En este trabajo nos centramos en el tema de la metrología. En concreto en las monedas pesos y medidas utilizadas en una parte de la actual España durante el siglo XVIII. En 1801 se abordó en España una unificación de los sistemas de pesas y medidas. Anteriormente las distintas regiones utilizaban unidades tradicionales que diferían incluso entre pueblos cercanos. En 1849 se establece por ley[3] en España el uso del Sistema Métrico Decimal (Aznar, 1997). Hasta ese momento casi todos los textos de aritmética incluían apartados específicos dedicados tanto a describir las unidades de diferentes regiones, como a enseñar a operar con ellas y a determinar las distintas equivalencias existentes. Incluso existían textos dedicados en exclusiva a estas cuestiones como por ejemplo en libro de Poy y Comes (1838).

[3] Aunque, como es natural, las unidades tradicionales se siguieron utilizando mucho tiempo después. De hecho, aún hoy en día se utilizan medidas tradicionales en algunos pueblos.

La presencia de estos contenidos en libros de texto dedicados a la formación de la juventud o al uso de mercaderes y comerciantes se justificaba en la inmensa utilidad práctica de dichos conocimientos. A nivel comercial, por ejemplo, se hacía necesario conocer las distintas divisas y sus equivalencias. La vida en campo implicaba el uso cotidiano de unidades de longitud y superficie, de peso, de capacidad, etc. puesto que con ellas se medía el trabajo y la productividad de tierras y animales, las capacidades de toneles. Al ser las unidades diferentes en distintos territorios, era necesario conocer las equivalencias a la hora de intercambiar productos o realizar compra-ventas en ferias y mercados.

En la actualidad muchas de estas necesidades han desaparecido puesto que el Sistema Métrico Decimal está plenamente establecido y, además, el uso del dinero, que actúa como elemento homogeneizador, está completamente extendido. El trueque ha desaparecido y tan sólo cuando se viaja a países con una divisa diferente a la propia surgen situaciones de carácter similar.

En cualquier caso, surge la pregunta siguiente: ¿Cuál puede ser, la aportación de estos contenidos metrológicos a la enseñanza-aprendizaje de los estudiantes actuales? Con este trabajo pretendemos avanzar en la respuesta a esta pregunta. Para ello analizaremos un tratado aritmético de carácter local publicado durante la segunda mitad del siglo XVIII y trataremos de extraer posibles implicaciones didácticas a partir de los resultados obtenidos.

2. METODOLOGÍA

El estudio que realizamos se trata de un análisis textual (Gómez, 2011) y a priori (Van Dormolen, 1986) de la *Arithmetica especulativa, y práctica*. Se enmarca dentro del paradigma metodológico del análisis del contenido en sentido genérico entendido como un conjunto de instrumentos metodológicos aplicados a discursos (Bardin, 1986).

Las unidades de análisis son los capítulos del libro y, más en particular, aquellos que contienen contenidos relacionados con la metrología. Los focos en torno a los que se organiza el análisis son los siguientes:

- Identificación de los capítulos del texto que incluyen contenidos relacionados con la metrología del Reino de Aragón.
- Descripción de las monedas, pesos y medidas aragonesas del siglo XVIII.

- Identificación, descripción y análisis de los ejercicios y problemas planteados por el autor en los que intervienen monedas, pesos y medidas aragonesas del siglo XVIII. En concreto, en este punto prestaremos especial atención a:
  - Procedimiento utilizado por el autor para la resolución.
  - Contexto en el que se propone el problema.
  - Significado que se otorga a las distintas operaciones aritméticas.

El ejemplar utilizado para llevar a cabo el estudio se corresponde con la primera edición de la obra y está disponible electrónicamente[4]. De este modo, los criterios de calidad señalados por Scott (1990) de autenticidad, credibilidad, representatividad y significado se satisfacen gracias a que se han consultado las fuentes originales.

3. EL AUTOR Y SU OBRA

Se disponen muy escasos datos sobre la vida del jesuita Joseph Biel. Además de su pertenencia a la Compañía de Jesús (de la que fue coadjutor desde 1749), se sabe que nació el 15 de octubre del año 1712 en la villa de Montalbán, que fue maestro en las escuelas públicas de la ciudad de Teruel y que murió en 1790 (Sánchez, 1929; Obeso, 1921; Hervás, 2007).

Como única obra escrita, Obeso (1921) señala tres ediciones de su *Arithmetica* de los años 1762, 1789 y 1844. Palau (1949) menciona ediciones de 1789, 1797 y 1844. La primera edición fue publicada en Valencia bajo dos títulos distintos (Meavilla y Oller 2014). Las restantes fueron todas ellas impresas en la ciudad de Zaragoza (ver Figura 1).

La *Arithmetica especulativa, y practica* está dirigida a los niños, principiantes, mercaderes y comerciantes, tal como se indica en la dedicatoria al lector que se presenta en las páginas preliminares de la obra:

> Y aunque mi principal mira en esta Obra, por razón de mi empleo, ha sido el atender a la instrucción de los Niños, y principiantes, pero es también igualmente instructiva para los Mercaderes, Comerciantes, y otros, por contenerse en ella todas aquellas Reglas concernientes para sacar en limpio sus compras, ventas, y demás cuentas; añadiéndose para esto la noticia, y correspondencia de Monedas, Pesos, y Medidas, según su diversidad en estos Reynos, sacado de los Autores más modernos, y experiencias que he hecho a este fin. (Biel, 1762, p. xiv).

[4] https://hdl.handle.net/2027/ucm.5322481709


ARITHMETICA ESPECULATIVA, Y PRACTICA, QUE CONTIENE TODO LO QUE PERTENECE AL ARTE MENOR. METODO FACIL, Y CLARO PARA APRENDER à contar los Niños, y otros que comienzan. ORDENADA POR EL HERMANO JOSEPH Biel de la Compañia de JESUS, Y LA DEDICA A MARIA SANTISSIMA DOLOROSA. EN VALENCIA: POR JOSEPH ESTEVAN DOLZ, Impressor del S. Oficio. Año 1762.

ARITHMETICA ESPECULATIVA, Y PRACTICA PARA LO MERCANTIL, CON EL VALOR, Y CORRESpondencia de las Monedas, Pesos, y Medidas de estos Reynos. ORDENADA POR EL HERMANO JOSEPH Biel de la Compañia de JESUS. Y LA DEDICA A MARIA SANTISSIMA DOLOROSA. EN VALENCIA: POR JOSEPH ESTEVAN D Impressor del S. Oficio. Año 1762

ARITMETICA ESPECULATIVA, Y PRACTICA PARA LO MERCANTIL, CON EL VALOR, Y CORRESPONDENCIA DE LAS MONEDAS, PESOS, Y MEDIDAS DE ESTOS REYNOS. ORDENADA POR EL HERMANO JOSEF BIEL, de la Compañia de Jesus. Y LA DEDICA A MARIA SANTISIMA DOLOROSA. EN ZARAGOZA: En la Oficina de Medardo Heras. Con las licencias necesarias.

ARITMÉTICA ESPECULATIVA, Y PRÁCTICA PARA LO MERCANTIL, CON EL VALOR Y correspondencia de las Monedas Pesos, y Medidas, de estos Reynos. ORDENADA POR EL HERMANO JOSE BIEL DE LA COMPAÑÍA DE JESUS. ZARAGOZA: EN LA OFICINA DE HERAS.

Figura 1. Distintas portadas de la obra.
Fuente: Universidad Complutense de Madrid y Biblioteca Nacional de España.

Aunque como hemos señalado anteriormente, la primera edición data del año 1762, el texto fue escrito probablemente en 1761[5]. Aparte de los apartados preliminares propios de este tipo de textos (Dedicatoria a la Reina de los Ángeles María Santísima Dolorosa, Licencia de la religión, Aprobación del Dr. Basilio Romà, Licencia del Consejo, Fe de erratas, Tasa, y Prólogo al Lector) y de la tabla de contenidos final, la obra consta de 347 páginas de texto matemático y consiste en veintiocho capítulos cuyos contenidos se reseñan en la Tabla 1.

Capítulo I	*De la difinicion de la Arithmetica, de la Unidad, del Numero, de los Guarismos, y de la Numeracion* (pp.1–7)
Capítulo II	*Del valor, y correspondencia de Monedas, Pesos, y Medidas* (pp.7–19)

[5] En la página 19 del capítulo II leemos: "Un Doblon en Oro vale en el presente año de 1761. 40. Reales de Aragon".

Capítulo III	*Del sumar llano* (pp. 20–28)
Capítulo IV	*Del sumar compuesto* (pp. 28–39)
Capítulo V	*Del restar llano* (pp. 39–47)
Capítulo VI	*Del restar compuesto* (pp. 47–58)
Capítulo VII	*Del multiplicar llano* (pp. 58–78)
Capítulo VIII	*Del multiplicar compuesto* (pp. 78–130)
Capítulo IX	*Del partir* (pp. 131 – 156)
Capítulo X	*Del partir compuesto, y por entero* (pp. 157–176)
Capítulo XI	*De la prueva de las quatro operaciones de la Arithmetica* (pp. 176 –195)
Capítulo XII	*De reducir monedas* (pp. 195–202)
Capítulo XIII	*De los quebrados* (pp. 202–212)
Capítulo XIV	*De sumar, restar, multiplicar, y partir quebrados* (pp. 212–226)
Capítulo XV	*De la regla de tres, y su división* (pp. 226–231)
Capítulo XVI	*De la regla de tres simple directa* (pp. 231–235)
Capítulo XVII	*De reducir monedas, pesos, medidas, y mensuras por regla de tres* (pp. 235 – 253)
Capítulo XVIII	*De la regla de tres simple indirecta* (pp. 253–257)
Capítulo XIX	*De la regla de tres compuesta directa, que es quando concurren mas de tres numeros* (pp. 257–260)
Capítulo XX	*De la regla de tres compuesta indirecta* (pp. 260–264)
Capítulo XXI	*De ganancias, y pèrdidas à tanto por ciento* (pp. 264–273)
Capítulo XXII	*De la regla de tres por quebrados* (pp. 274–275)
Capítulo XXIII	*De la regla de falsa posicion* (pp. 276–281)
Capítulo XXIV	*De la regla de Compañias simple* (pp. 281–296)
Capítulo XXV	*De la regla de Compañias con tiempo* (pp. 296–305)
Capítulo XXVI	*De la regla de Aligaciones, ò mezclas* (pp. 305–317)
Capítulo XXVII	*De baratar, ò trocar mercaderías* (pp.317–321)
Capítulo XXVIII	*De la Regla de Progressiones* (pp. 321–347)

Tabla 1. Contenidos de la obra de Joseph Biel (1762).

Hemos detectado contenidos relacionados con la metrología aragonesa del siglo XVIII en 9 capítulos de la obra. En el capítulo II encontramos una descripción de las monedas, pesos y medidas utilizadas en la España peninsular del siglo XVIII (Castilla, Aragón Valencia, Cataluña, Navarra y Mallorca). No obstante, y como corresponde a un libro escrito en Teruel, se presta especial atención a las utilizadas en el antiguo Reino de Aragón[6]. Posteriormente (capítulos IV, VI, VIII, X, XI, XII, XVI y XVII), en el contexto de las distintas operaciones aritméticas, también se trabaja con las monedas, pesos y medidas presentadas anteriormente en un contexto más práctico.

[6] Aunque, con los Decretos de Nueva Planta promulgados por el rey Felipe V en el primer decenio del siglo XVIII, los antiguos territorios de la Corona de Aragón (Aragón, Valencia, Cataluña y Mallorca) habían quedado reducidos a meras provincias del Reino de España (Elliot, 2009).

4. MONEDAS, PESOS Y MEDIDAS DE ARAGÓN EN EL SIGLO XVIII

Como ya hemos mencionado, en el segundo capítulo (páginas 7-19) se realiza una amplia exposición de distintas monedas, pesos y medidas de España y de algunos países europeos y del norte de África, con sus subdivisiones y multitud de equivalencias entre ellas. El caso del Reino de Aragón se aborda con especial detalle (páginas 8-12). Biel justifica el espacio destinado a esta enumeración (cuya lectura resulta ciertamente costosa) del siguiente modo:

> Monedas, Pesos, Medidas, y Mensuras, se podrán sumar, restar, multiplicar, y partir; lo que no se podría hacer, ignorando el valor de ellas; y por esta causa las he puesto aquí al principio: y la correspondencia entre sí, servirá para la reducción de una a otras, por la Regla de Tres, o usando solamente de la de Multiplicar, que es más fácil, como adelante se verá. (Biel, 1762, p. 19).

El autor comienza presentando las unidades monetarias con sus subunidades, así como la equivalencia con la moneda del Reino de Castilla: "la libra Jaquesa tiene 20 sueldos de plata. El sueldo 16 dineros, o menudos. Corresponde la libra a 18 reales, y 28 maravedís de vellón Castellano" (Biel, 1762, p. 8-9). A continuación, se detallan las unidades y subunidades utilizadas para medir pesos: "la carga[7] tiene 3 quintales. El quintal 4 arrobas. La arroba 36 libras, y 30, y 24 según fueren. La libra[8] 12 onzas; y siendo de carne, o pescado 36. La onza 4 cuartos. El cuarto 4 arienzos o adarmes. El arienzo 32 granos" (Biel, 1762, p. 9).

Las unidades de longitud eran "la vara[9] tiene 4 palmos. El palmo 4 cuartos"; mientras que para medir capacidades en el caso de líquidos: "Un nietro[10] de vino tiene 16 cántaros. Un cántaro 28 libras" (Biel, 1762, p. 9).

En el caso de las medidas de capacidad para áridos, la unidad principal utilizada en Aragón era el cahíz[11]. El cahíz se dividía habitualmente en fanegas (a veces en barcillas o en medias), las fanegas se dividían en cuartales y los cuartales en almudes (o cuartillas). Pese a que los nombres de las unidades eran los mismos por todo el territorio, las divisiones en subunidades no lo eran. Tampoco era homogéneo el valor de un cahíz.

[7] En el sistema métrico decimal equivale a 148 kg.
[8] Equivalente a la libra romana.
[9] Equivale en el sistema métrico decimal a unos 77 cm.
[10] En función de las regiones, esta medida equivale a unos 159 o 160 l.
[11] Con las variaciones que comentamos más adelante, un cahíz equivale a unos 33 litros aproximadamente.

En el texto, Biel recoge con un gran detalle (seguramente debido a su origen aragonés) esta información. En concreto se consideran (Biel, 1762, p. 9-12) todos los corregimientos aragoneses[12]: Zaragoza, Huesca, Cinco Villas, Jaca, Barbastro, Alcañiz, Albarracín, Benabarre, Borja, Calatayud, Daroca, Teruel y Tarazona. Además, dentro del corregimiento de Teruel (dónde vivía el autor) se distinguen los casos especiales de la Plevanía de Montalbán, de las llamadas Bailías[13], y de los denominados nueve lugares del río Martín[14]. En la Tabla 2 recogemos de forma sintética la información.

REGIÓN	**UNIDADES**				
Zaragoza, Huesca, Cinco Villas, Jaca, Barbastro, y Alcañiz	1 cahíz	8 fanegas	24 cuartales	96 almudes	40 celemines castellanos
Albarracín	1 cahíz	4 fanegas	16 cuartales	64 cuartillas	36 celemines castellanos
Bailías	1 cahíz	12 barcillas	24 cuartales	96 almudes	46 celemines castellanos y 1 cuartillo
Benabarre	1 cahíz	8 fanegas	16 cuartales	96 almudes	40 celemines castellanos
Borja	1 cahíz	8 fanegas		96 almudes	40 celemines castellanos
Calatayud	1 cahíz	4 fanegas 8 medias	16 cuartales	56 cuartillas 112 almudes	40 celemines castellanos
Daroca	1 cahíz	4 fanegas 8 medias	16 cuartales	64 cuartillas 96 almudes	40 celemines castellanos
Plevanía de Montalbán y lugares del río Martín	1 cahíz	6 fanegas	24 cuartales	96 almudes	46 celemines castellanos
Teruel	1 cahíz	5 fanegas	20 cuartales	80 cuartillas	46 celemines castellanos
Tarazona	1 cahíz	8 medias	16 cuartales	96 almudes	39 celemines castellanos

Tabla 2. Unidades para la medida de áridos en Aragón durante el siglo XVIII.

Observamos en la última columna (información que también proporciona el autor del libro) que la medida de capacidad de áridos denominada ‘cahíz’ podía tener hasta 5 valores

[12] La división administrativa del territorio en corregimientos se estableció en 1711 a raíz del Decreto de nueva Planta y se mantuvo vigente hasta 1833-1834 (Ubieto, 2001).

[13] Las Bailías eran agrupaciones de pueblos dependientes de una orden religiosa, en este caso la del Hospital. Las tres que nos ocupan: la de Castellote, la de Cantavieja y la de Aliaga se ubicaban en el actual Maestrazgo (Sanchís & Febrer, 2003).

[14] Nueve poblaciones situadas a lo largo del citado río y que todavía existen: Vivel de río Martín, Villanueva del Rebollar de la Sierra, Fuenferrada, La Rambla de Martín, Las Parras de Martín, Valdeconejos, Martín del río, Armillas y La Hoz de la vieja

diferentes en función de la región. Las diferencias existentes entre territorios pertenecientes a un mismo reino y, en ocasiones, muy cercanos geográficamente[15] resultan llamativas. También resulta reseñable la gran variedad de formas en que si subdividían las unidades. Aunque predomina la subdivisión en cuartos (véase el caso de Albarracín, por ejemplo) aunque también observamos casos de división en tercios (u otros múltiplos de 3, como 6 o 12), en quintos (caso de Teruel) o, sorprendentemente, incluso en séptimos (paso de cuartales a almudes en Calatayud).

5. OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS

En los capítulos IV (*Del sumar compuesto*), VI (*Del restar compuesto*), VIII (*Del multiplicar compuesto*), X (*Del partir compuesto, y por entero*) y XI (*De la prueba de las quatro operaciones de la Arithmetica*) se estudian las operaciones aritméticas elementales con números complejos. Recordamos que se llama habitualmente número complejo a una cantidad expresada en unidades de diferentes órdenes, pero de la misma especie. Así, la cantidad 4 km 8 dam 5 m es un número complejo. En cada uno de estos capítulos se proponen diversos ejemplos, algunos de los cuales se refieren explícitamente a Aragón.

En el Capítulo IV aparecen un total de 8 ejemplos en los que el autor realiza diversas sumas utilizando algunas de las unidades descritas en el Capítulo II. De ellos, 6 están contextualizados en el Reino de Aragón. En la Figura 2 aparece el Ejemplo V.

[15] Aragón tiene una superficie de menos de 48.000 km^2 y, por ejemplo, la distancia entre Teruel y Montalbán es inferior a 78 km.

EXEMPLO V. *De ſumar Cahices, Fanegas, Quartales, y Almudes, medida de Zaragoza. El Cahiz tiene 8. Fanegas, la Fanega 3. Quartales, y el Quartal 4. Almudes.*

Cahices.	Fanegas.	Quartales.	Almudes.
798	6	2	3
516	4	1	2
240	2	0	3
70	5	2	1
1626	3	1	1
827	4	1	2
1626	3	1	1

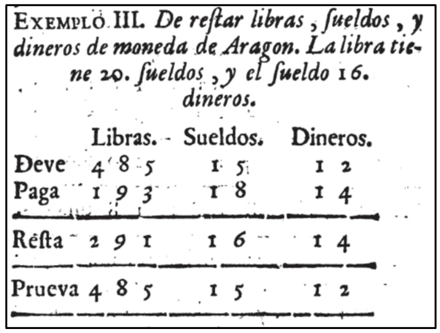
Figura 2. Ejemplo V del Capítulo IV.
Fuente: Biel, 1762, p. 34.

El procedimiento que detalla el autor para realizar esta suma consiste el sumar por separado cada unidad, comenzando por la más pequeña, e ir teniendo en cuenta para las llevadas que se trabaja en bases diferentes para cada unidad (base 4 para los almudes, base 3 para los cuartales, base 8 para las fanegas y base 10 para los cahices). Así, la suma de la columna correspondiente a los almudes es 9 almudes; que equivalen a 2 cuartales y 1 almud. El autor escribe el 1 en la posición correspondiente y lleva 2 a la suma de la columna correspondiente a los cuartales; y así sucesivamente.

Para la comprobación, el autor recurre a un procedimiento basado en la propiedad asociativa de la suma. Primero realiza por un lado la suma de las tres cantidades iniciales más pequeñas. A continuación, a este resultado le suma la cantidad inicial mayor que ha dejado antes sin sumar. Finalmente, comprueba si la suma así obtenida coincide con la obtenida anteriormente. En definitiva, para comprobar la corrección del resultado, Biel (1762, p. 27-28) comprueba que se verifica la igualdad:

$$a + b + c + d = a + (b + c + d)$$

En el Capítulo VI aparecen 10 ejemplos de restas involucrando números complejos. De ellos, 5 se contextualizan en Aragón. En la Figura 3 se muestra el Ejemplo III.


EXEMPLO III. *De restar libras, sueldos, y dineros de moneda de Aragon. La libra tiene 20. sueldos, y el sueldo 16. dineros.*

	Libras.	Sueldos.	Dineros.
Deve	4 8 5	1 5	1 2
Paga	1 9 3	1 8	1 4
Resta	2 9 1	1 6	1 4
Prueva	4 8 5	1 5	1 2

Figura 3. Ejemplo III del Capítulo VI.
Fuente: Biel, 1762, p. 50.

Nuevamente el procedimiento para restar implica trabajar separadamente las distintas unidades, teniendo en cuentas las distintas bases en las que se trabaja en cada caso (base 16 para los dineros, base 20 para los sueldos y base 10 para las libras). La comprobación, en este caso, se lleva a cabo sumando el sustraendo al resultado de la resta y comparándolo con el minuendo.

En este ejemplo, la resta se presenta a partir del pago parcial de una deuda. En otros ejemplos la resta aparece relacionada con el gasto de parte de una cantidad recibida o de la que se ya se dispone.

El Capítulo VIII está dedicado la multiplicación de números complejos en el contexto de las unidades de medida presentadas en el Capítulo II. La mayor dificultad de esta operación se pone de manifiesto en el hecho de que este capítulo contiene 20 ejemplos, de los que 6 se contextualizan en Aragón. En la Figura 4 se muestra el Ejemplo XII.

EXEMPLO XII. *De multiplicar arrobas, libras, y onzas por ſueldos, y dineros, moneda de Aragon.*

Vendo . 6. arrob, 8. lib. 7. onz. de paſſas.
à . . . . 10. ſuel. 9. din. la arroba.

63. ſuel. 6. din.
1. ſuel. 12. din. $\frac{72}{432}$
9. din. $\frac{168}{432}$
2. din. $\frac{150}{432}$
0. din. $\frac{169}{432}$
De los quebrados (1. din.

Valen 65. ſuel. 14. din. $\frac{127}{432}$. avos.

Figura 4. Ejemplo XII del Capítulo VIII.
Fuente: Biel, 1762, p. 117.

En el ejercicio se solicita calcular el precio de una determinada cantidad de pasas (6 arrobas 8 libras 7 onzas) conociendo el valor de una arroba (10 sueldos 9 dineros) y recordando las equivalencias entre estas unidades que aparecen en el Capítulo II (1 sueldo equivale a 16 dineros, 1 arroba son 36 libras y 1 libra 12 onzas).

La relativa complicación del proceso se pone de manifiesto en que el autor emplea aproximadamente 2 páginas en explicarlo detalladamente. De hecho, Biel utiliza un método bastante extraño para realizar el producto solicitado:

- En primer lugar, se multiplican las 6 arrobas por el precio de 1 arroba y se obtiene como resultado 63 sueldos 6 dineros.
- A continuación, se calcula el precio de 8 libras del siguiente modo. Se descomponen las 8 libras en la suma de 6 libras más 2 libras. Ahora, 6 libras son la sexta parte de 1 arroba por lo que su precio es la sexta parte del precio de 1 arroba (1 sueldo 12 dineros y 72/432 de dinero). Por otro lado, las 2 libras restantes son la tercera parte de 6 libras y, por tanto, su precio es la tercera parte del precio de 6 libras (9 dineros y 168/432 de dinero).
- Para continuar, se calcula el precio de las 7 onzas como sigue. Se descomponen las 7 onzas como la suma de 6 onzas más 1 onza. Ahora, 6 onzas son la cuarta parte de 2 libras por lo que su precio es la cuarta parte del precio de 2 libras (2 dineros y 150/432

de dinero). Finalmente, 1 onza es la sexta parte de 6 onzas por lo que su precio es la sexta parte del precio de 6 onzas (169/432 de dinero).

- Finalmente se suman todos los resultados parciales anteriores usando las técnicas del Capítulo VI.

La totalidad de los ejemplos presentados en este capítulo presentan la multiplicación en un contexto de compra-venta en el que se conoce el precio de una unidad y se desea conocer el precio total de la mercancía implicada en la transacción.

En el Capítulo X se aborda la división de números complejos a través de 16 ejemplos. De entre ellos, 6 se contextualizan utilizando unidades del Reino de Aragón. En la Figura 5 se muestra el Ejemplo IX.

EXEMPLO IX. *De partir arrobas, y libras.*

3 9 5,4.	Arrob. 6. lib. de Aragon, partidas à 325. Compañeros.
0 7 0 4.	
0 5 4.	Cociente 12. arrob. 6. libras.
3 6.	
3 2 4.	650. arrob.
1 6 2 6.	325 . arrob.
1 9 5 0.	54. arrob. 6. libras.
0 0 0 0.	
	Prueva 3954. arrob. 6. libras.

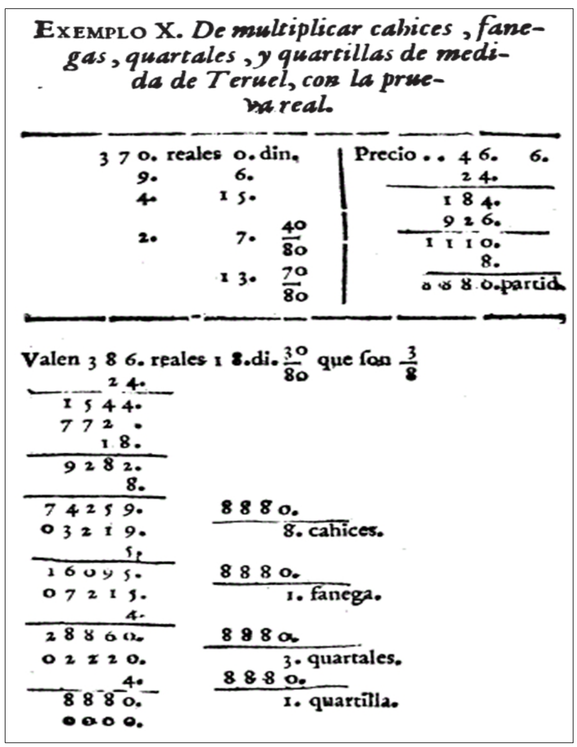
Figura 5. Ejemplo IX del Capítulo X.
Fuente: Biel, 1762, p. 168.

El ejemplo presentado se resuelve aplicando esencialmente el mismo algoritmo que se utiliza para realizar la división de números decimales. La diferencia, como en todos los casos anteriores, radica en el uso de bases no decimales a la hora de trabajar. Por ejemplo, en este caso el autor comienza dividiendo las 3954 arrobas entre los 325 compañeros, obteniendo un cociente de 12 y un resto de 54 arrobas. Para poder continuar, las 54 arrobas se transforman en 1944 libras (pues 1 arroba equivale a 36 libras) que se añaden a las 6 libras originales para obtener 1950 libras. Estas 1950 libras se dividen de nuevo entre los 325 compañeros para obtener un cociente exacto de 6 libras.

Además del proceso que acabamos de describir el autor presenta otro método que consiste en expresar el dividendo utilizando una sola unidad. En este caso, el dividendo se convertiría en 142350 libras, convirtiéndose el problema en una división entre números naturales. El resultado, 438 libras se convertiría en arrobas dividiendo entre 36.

En este ejemplo la división aparece en un contexto de reparto de una cantidad entre varias personas (división partitiva). Además de estas situaciones, también encontramos la división utilizada para encontrar el precio de una unidad a partir del precio de una cierta cantidad de mercancía (división partitiva) o para saber cuánta mercancía se puede comprar con un cierto dinero conociendo el precio de una unidad (división cuotitiva).

En el Capítulo XI se presentan 13 ejemplos. Por la naturaleza de los contenidos que se tratan (pruebas de las distintas operaciones aritméticas), casi todos aparecen descontextualizados; es decir, se plantean las operaciones a realizar sin una motivación concreta. Sólo uno de ellos (ver Figura 6) plantea la situación en un contexto real empleando unidades aragonesas de medida de áridos.



EXEMPLO X. *De multiplicar cahices, fanegas, quartales, y quartillas de medida de Teruel, con la prueva real.*

370. reales 0. din.
9. 6.
4. 15.
2. 7. 40/80
13. 70/80

Precio . . 46. 6.
24.
184.
926.
1110.
8.
0880. partid.

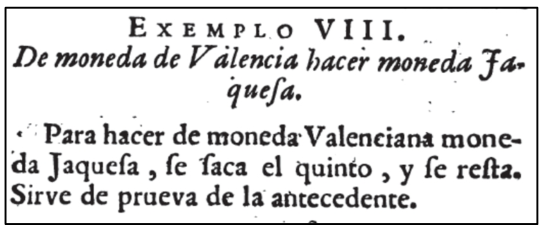
Valen 386. reales 18. di. 30/80 que son 3/8
24.
1544.
772.
18.
9282.
8.
74259. 8880.
03219. 8. cahices.
5.
16095. 8880.
07215. 1. fanega.
4.
28860. 8880.
02220. 3. quartales.
4. 8880.
8880. 1. quartilla.
0000.

Figura 6. Ejemplo X del Capítulo XI.
Fuente: Biel, 1762, p. 189.

6. REGLA DE TRES Y REDUCCIÓN DE MONEDAS

Los capítulos XII (*De reducir monedas*) y XVII (*De reducir monedas, pesos, medidas, y mensuras por regla de tres*) están dedicados al mismo problema, pero utilizando técnicas diferentes.

En el Capítulo XII aparecen un total de 8 ejemplos en los que una cantidad de dinero expresada en una cierta unidad monetaria se expresa en términos de otra divisa diferente. En este capítulo se resuelven estos problemas mediante una serie de reglas específicas para cada tipo de conversión. La mitad de estos 8 ejemplos implican unidades monetarias aragonesas de la época. La Figura 7 muestra uno de dichos ejemplos.

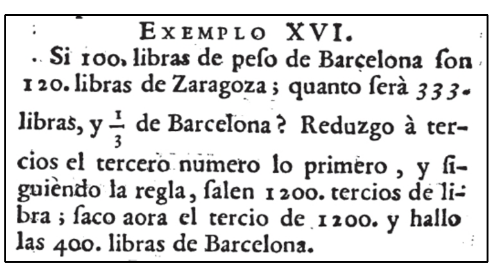


EXEMPLO VIII.
De moneda de Valencia hacer moneda Jaqueſa.
Para hacer de moneda Valenciana moneda Jaqueſa, ſe ſaca el quinto, y ſe reſta. Sirve de prueva de la antecedente.

Figura 7. Ejemplo VIII del Capítulo XII.
Fuente: Biel, 1762, p. 202.

Como vemos, el autor proporciona únicamente una regla memorística para la conversión (sacar la quinta parte y restar). Esta regla se basa en la información proporcionada por el autor en el Capítulo II, dónde se indica que 40 unidades de moneda Jaquesa valen lo mismo (1 doblón de oro) que 50 unidades de moneda de Valencia.

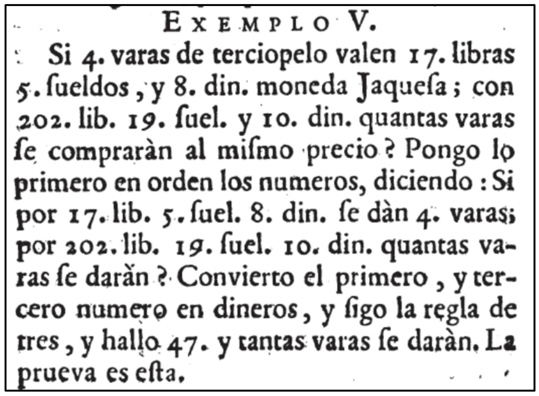
El Capítulo XVII es el más extenso de toda la obra, poniendo de manifiesto su importancia. En él aparecen 28 ejemplos en los que se utiliza la Regla de Tres (simple directa) para resolver problemas de conversión de divisas. Además, la mitad de dichos ejemplos se dan en un contexto de divisas aragonesas. Por ejemplo, la Figura 8 muestra el Ejemplo XVI.



EXEMPLO XVI.
Si 100. libras de peſo de Barcelona ſon 120. libras de Zaragoza; quanto ſerà 333. libras, y $\frac{1}{3}$ de Barcelona? Reduzgo à tercios el tercero numero lo primero, y ſiguiendo la regla, ſalen 1200. tercios de libra; ſaco aora el tercio de 1200. y hallo las 400. libras de Barcelona.

Figura 8. Ejemplo XVI del Capítulo XVII.
Fuente: Biel, 1762, p. 240.

El Capítulo XVI (*De la regla de tres simple directa*) está dedicado a la resolución de 8 problemas mediante el uso de la Regla de Tres. Todos ellos involucran situaciones de compra-venta de mercancías. Uno de ellos, que mostramos en la Figura 9, involucra unidades aragonesas.


EXEMPLO V.

Si 4. varas de terciopelo valen 17. libras 5. ſueldos, y 8. din. moneda Jaqueſa; con 202. lib. 19. ſuel. y 10. din. quantas varas ſe compraràn al miſmo precio? Pongo lo primero en orden los numeros, diciendo: Si por 17. lib. 5. ſuel. 8. din. ſe dàn 4. varas; por 202. lib. 19. ſuel. 10. din. quantas varas ſe daràn? Convierto el primero, y tercero numero en dineros, y ſigo la regla de tres, y hallo 47. y tantas varas ſe daràn. La prueva es eſta.

Figura 9. Ejemplo V del Capítulo XVI.
Fuente: Biel, 1762, p. 233.

Se observa que, para poder aplicar el algoritmo de la Regla de Tres, al autor convierte las cantidades expresadas mediante números complejos en cantidades simples utilizando la unidad más pequeña (en este caso, las libras y sueldos se convierten en dineros).

7. ALGUNAS IMPLICACIONES DIDÁCTICAS.

Una vez realizado un análisis de los contenidos metrológicos que se contienen en la *Arithmetica especulativa, y practica* de Joseph Biel, podemos plantearnos qué posible utilidad puede tener el diseño de actividades basadas en esta obra.

En primer lugar, observamos que, pese a tratarse de contenidos matemáticos, el trabajo con este texto podría contribuir a desarrollar otras competencias. Por ejemplo:

- El texto está escrito en un castellano que no sigue las normas ortográficas actuales. Este hecho, que pone de manifiesto la evolución del lenguaje escrito, tiene un notable interés didáctico para las clases de Lengua y Literatura Española y puede aprovecharse en una enseñanza de carácter interdisciplinar.
- La organización territorial de Aragón que se recoge en el libro de Biel, podría ser utilizada por los departamentos didácticos de Geografía e Historia.

En cuanto a los contenidos relacionados directamente con las matemáticas, podemos hacer diversas apreciaciones:

- Los contenidos concernientes a la metrología histórica aragonesa también se pueden utilizar para que los estudiantes conozcan, aprecien y valoren el patrimonio cultural aragonés y analicen los elementos y rasgos básicos del mismo.
- Los diversos valores asignados a las mismas unidades de medida en las distintas regiones a lo largo de la historia, pueden servir para que los estudiantes descubran la necesidad de un sistema universal (Sistema Métrico Decimal) y sean capaces de valorarlo.
- Los problemas que aparecen en el texto permiten introducir situaciones muy variadas que dotan de distintos significados a las operaciones aritméticas.
- Las operaciones con números complejos, no son actualmente objeto de enseñanza. Sin embargo, su uso puede suponer un interesante recurso didáctico para facilitar una mejor comprensión del sistema de numeración decimal y para comprender el funcionamiento de sistemas de numeración en base no decimal con los que sí que se trabaja en el aula como, por ejemplo, el manejo de amplitudes de ángulos expresadas en el sistema sexagesimal.
- Los problemas de Biel que utilizan la regla de tres pueden ayudar a los estudiantes en la identificación y utilización de las magnitudes directamente proporcionales en situaciones de la vida cotidiana, y en la utilización de la proporcionalidad de forma competente en un contexto de resolución de problemas.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se ha realizado al amparo del proyecto de investigación del Plan I+D+i del Ministerio de Economía y Competitividad EDU2016-78764-P. También ha sido parcialmente financiado por el Gobierno de Aragón y el Fondo Social Europeo (Grupo S119-Investigación en Educación Matemática).

REFERENCIAS

Aznar, J. V. (1997). *La unificación de los pesos y medidas en España durante el siglo XIX*. (Tesis doctoral). Universidad de Valencia, España.

Bardin, L. (1986). *El análisis de contenido*. Madrid: Akal.

Biel, J. (1762). *Arithmetica especulativa, y practica para lo mercantil, con el valor, y correspondencia de las Monedas, Pesos, y Medidas de estos Reynos*. Valencia: Joseph Estevan Dolz.

Bishop, A. J. (1988). *Mathematics enculturation: A cultural perspective on mathematics education*. Dordrecht: Kluwer.

D'Ambrosio, U. (1990). *Etnomatemática*. São Paulo: Editora Ática.

D'Ambrosio, U. (1996). Ethnomathematics: An explanation. En Calinger, R., (Ed.), *Vita mathematica: Historical research and integration with teaching*, (pp. 245 – 250). Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Elliott, J. H. (2009). Una Europa de monarquías compuestas. *España, Europa y el mundo de ultramar (1500-1800)*. Madrid: Taurus.

Gómez, B. (2011). El análisis de manuales y la identificación de problemas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. *PNA*, *5*(2), 49-65.

Hervás, L. (2007). *Biblioteca jesuítica-española (1759-1799)*. Madrid: Libris.

Jahnke, H. N.; Arcavi, A.; Barbin, E.; Bekken, O.; Furinghetti, F.; El Idrissi, A.; Silva Da Silva; C.M., & Weeks, Ch. (2000). The use of original sources in the mathematics classroom. En Fauvel, J. & Van Maanen, J. (Eds.) *History in mathematics education: the ICMI study* **(**pp. 291 - 328). Dordrecht: Kluwer.

Jankvist, U.T. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational studies in Mathematics*, *71*(3), 235-261.

Maz, A., & Rico, L. (2015). Principios didácticos en textos españoles de matemáticas en los siglos XVIII y XIX. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *18*(1), 49-76.

Meavilla, V., & Oller-Marcén, A.M. (2014). Aspectos históricos de Teruel a partir de un problema aritmético del siglo XVIII. Una propuesta multidisciplinar. *Studium. Revista de Humanidades*, *20*, 135-150.

Obeso, J. M. (1921). Papeletas bibliográficas. *Revista Matemática Hispano-Americana*, tomo III.

Palau, A. (1949). *Manual del libreo hispanoamericano. Bibliografía general española e hispanoamericana desde la invención de la imprenta hasta nuestros tiempos con el valor comercial de los impresos descritos* (Volumen II). Barcelona: Librería Anticuaria de Antonio Palau.

Poy y Comes, M. (1838). *Tratado general de cambios, usos y estilos sobre el pago de las letras, monedas, pesos y medidas de todas las naciones comerciantes, y en particular de España, con su mútua correspondencia* (segunda impresión). Barcelona: Francisco Garriga.

Sánchez, A. (1929). *Las Matemáticas en la biblioteca del Escorial.* Madrid: Memorias de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

Sanchís, R. & Febrer, M.V. (2003). *La configuración del dominio feudal de la Orden de San Juan del Hospital en las Balías de Aliaga, Cantavieja y Castellote. Siglos XII- XIX*. Villarroya de los Pinares: Ayuntamiento de Villarroya de los Pinares.

Scott J. (1990). *A matter of record, documentary sources in social research*. Cambridge: Polity Press.

Ubieto, A. (2001). *El largo camino hacia las comarcas en Aragón* (*Aproximación didáctica*). Zaragoza: Diputación General de Aragón.

Van Dormolen, J. (1986). Textual analysis. En B. Christiansen, A. G. Howson y M. Otte (Eds.), *Perspectives on Mathematics Education* (pp. 141-171). Dordrecht, The Netherlands: Reidel.