García Jímenez, V. (2018). Resignificar la diferencial en y con prácticas de modelación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 11(1), 139-178.

Artículo recibido 5 de enero de 2018; Aceptado para publicación el 21 de Junio de 2018

Resignificar la diferencial en y con prácticas de modelación

Resignify the differential in and with modeling practices

Ventura García Jiménez[1]

Resumen

En este documento se presentan los resultados de una investigación en torno a la enseñanza y el aprendizaje de la diferencial. La investigación se llevó a cabo de acuerdo a los supuestos teóricos y metodológicos de un marco teórico denominado Socioepistemología. Estudiar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas desde la Socioepistemología implica enfocarse en las prácticas. Así, estos resultados se derivan del diseño y de la aplicación de una actividad didáctica centrada en prácticas de modelación; la actividad se aplicó a un grupo de estudiantes de primer semestre de la licenciatura en informática. Por las características de la actividad, el alumnado resolvió la actividad de forma escrita; se observó la intervención de los participantes. De acuerdo a las conclusiones de los estudiantes, y de lo observado, se analiza los resultados; de este proceso se concluye que la enseñanza y el aprendizaje de la diferencial centrada en las prácticas de modelación, puede ser una praxis significativa para resignificar este concepto matemático.

Palabras clave: Diferencial, práctica social de modelación, práctica social, Socioepistemología, resignificar.

Abstract

In this document the results of a research about the teaching and learning of the differential are presented. The research was carried out according to the theoretical and methodological assumptions of a theoretical framework called Socioepistemology. Studying the teaching and learning of mathematics from Socioepistemology involves focusing on the practices. Thus, these results are derived from the design and application of a didactic activity focused on modeling practices; the activity was applied to a group of students of the first semester of the degree in computer science; by the characteristics of the activity, the students solved the activity in written form; the intervention of the participants was observed. According to the conclusions of the students, and of the observed, the results are analyzed; from this process it is concluded that the teaching and learning of the differential centered on modeling practices can be a significant praxis to resignify this mathematical concept.

Keywords: Differential, social practice of modeling, social practice, Socioepistemology, resignify.

1. INTRODUCCIÓN

Uno de los elementos fundamentales en la construcción, invención y descubrimiento del conocimiento es la acción (Piaget, 1990). Si el sujeto no tiene la oportunidad de participar

[1] Maestro en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa. Chiapas, México. Email: ventura14jimenez@gmail.com

en la construcción de los aprendizajes, de acuerdo a sus conocimiento previos, difícilmente podrá comprender el significado y la función del conocimiento (Piaget, 1990). Pero esta acción no puede ocurrir en el vacío o fuera de los contextos socioculturales. No es suficiente, en el caso de las matemáticas, con que el o la estudiante memorice que dos más dos es cuatro; es necesario resignificar el conocimiento. Empero, en la práctica predominan aún los métodos tradicionales de enseñanza y aprendizaje: la disertación, la memorización de definiciones y procedimientos (Cantoral et al., 2014).

Con la intención de continuar mejorando las prácticas relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, en este documento ―de forma específica― se presentan los resultados de una investigación en torno a la enseñanza y el aprendizaje de la diferencial. Esta investigación se llevó a cabo de acuerdo a los supuestos básicos y metodológicos de un marco teórico denominado Socioepistemología; donde las prácticas sociales tienen un protagonismo fundamental en la construcción y comprensión del conocimiento. Estas prácticas sociales se revelan a través de ciertas prácticas recurrentes como medir, visualizar, predecir, contar, explicar, etcétera (Arrieta y Díaz, 2015). Con este tipo de prácticas y de heurística se busca promover una funcionalidad más significativa del saber matemático; porque la funcionalidad del conocimiento matemático es un elemento fundamental en la enseñanza y el aprendizaje (Cordero, 2005).

Para inferir la funcionalidad de las prácticas sociales, en específico de la práctica social de modelación, en la enseñanza y el aprendizaje de la diferencial, se diseñó y aplicó una actividad didáctica; estos procesos y resultados muestran que una enseñanza de las matemáticas enfocada en las prácticas o actividades humanas puede ayudar a resignificar el conocimiento.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo aún predomina el paradigma tradicional, así lo muestran las investigaciones y prácticas relacionadas con la educación matemática (Pulido, 2010; Cantoral et al., 2015).

> Una revisión a diferentes estudios que sistematizan resultados a escala mundial sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje nos permitió reconocer que, en la institución educativa de la que formamos parte desde 1990, ha sido practicado lo que puede llamarse un modelo tradicional de la enseñanza del Cálculo […] (Salinas y Alanís, 2009, p. 357).

Derivado de las conclusiones de Salinas y Alanís (2009), se puede decir, que las prácticas pedagógicas y educativas tradicionales aún son una constante en la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo. Predomina un discurso escolar centrado en objetos matemáticos abstractos (Cantoral, et al, 2014). Una enseñanza con estas características —para Cantoral y Mirón— "…logra que los estudiantes deriven, integren y calculen límites elementales, pero no son capaces de dar un sentido más amplio a esas nociones que les haga reconocer, por ejemplo, cuando un problema requiere de calcular una derivada" (citado por Salinas y Alanís, 2009, p. 360).

Los efectos de una enseñanza centrada en objetos matemáticos abstractos se pueden reflejar en el ámbito profesional:

> […] para dar seguimiento a sus egresados un instituto tecnológico de México, en el año 2004, aplicó una encuesta a 238 Ingenieros en Sistemas Computacionales en servicio. Llaman la atención las respuestas que dieron a la pregunta:
>
> ¿En su vida profesional utiliza usted ecuaciones diferenciales?
>
> a) Frecuentemente
> b) Ocasionalmente
> c) Nunca
>
> El 96% optó por la opción "c" y el 4% no contestó. Ninguno de ellos contestó ocasionalmente ni frecuentemente […]
>
> (Arrieta y Díaz, 2015, p. 22).

La escisión entre la escuela y la realidad, entre la escuela y el entorno cotidiano, profesional y científico se hace cada vez más visible. Estos acontecimientos emergen de la poca funcionalidad, por ejemplo, que tiene las matemáticas escolares en la vida material y espiritual del ser humano. De ahí la prioridad de continuar mejorando la calidad y funcionalidad de la enseñanza de las matemáticas.

En particular, en este trabajo se aborda una problemática relacionada con la enseñanza y el aprendizaje de la diferencial. Una problemática que tiene su génesis en el discurso escolar predominante. En este discurso o práctica educativa, se enseña y diserta sobre la diferencial en un lenguaje abstracto; un lenguaje centrado en el objeto, y no en prácticas que promuevan significados funcionales en torno a la diferencial (Pulido, 2010).

La enseñanza y el aprendizaje de la diferencial, en contraste con los demás conceptos del Cálculo, se lleva a cabo de manera superficial o se ignora (Pulido, 2010). Empero, la diferencial —se puede decir— es la columna vertebral del significado y la funcionalidad del cálculo diferencial e integral elemental y de las ecuaciones diferenciales ordinarias, así lo muestran las aplicaciones e investigaciones en el dominio de la física y de la misma matemática (Pulido, 2010).

La génesis de esta problemática —también— está en lo epistemológico (Pulido, 1998). Con la formalización del Cálculo con el concepto de límite se conquistó la fundamentación lógica requerida, pero se tornó en algo más abstracto la comprensión del significado y la funcionalidad de la diferencial en las futuras generaciones (Martínez et al., 2002).

En efecto, las componentes didácticas, epistemológicas, cognitivas y socioculturales de la enseñanza, del aprendizaje, y de la educación en general se convierten en unidades de análisis fundamentales para explicar y transformar la praxis educativa en algo más funcional; donde el alumnado tenga más oportunidades de construir significados de los conceptos matemáticos en prácticas contextualizadas.

Se puede decir que las prácticas sociales y las prácticas recurrentes de los entornos socioculturales permiten explicar, describir y resignificar la construcción, invención y descubrimiento de saberes funcionales y fértiles de la diferencial en los procesos de enseñanza y de aprendizaje. Porque el ser humano interviene de forma directa en una diversidad de prácticas; ya sea en prácticas cotidianas, en prácticas profesionales o científicas (Arrieta y Díaz, 2015). Y la escuela no está fuera del mundo sino en y con él (Freire, 2010).

3. MARCO TEÓRICO

Los resultados de esta investigación se obtuvieron y construyeron de acuerdo a los supuestos de un marco teórico específico: la Socioepistemología.

3.1 La Socioepistemología

La enseñanza tradicional de las matemáticas se centra en objetos matemáticos a priori, en esta línea ontológica y epistemológica, no hay nada que construir. El alumnado sólo se ocupa en descubrir, a través de la memorización de conceptos y de procedimientos, objetos matemáticos ideales y sin ninguna conexión con la realidad concreta.

> […] conceptos como el de función, razón, fracción, número, sucesión, espacio, etc., que, al ser introducidos al aula como objetos formales acompañados de procesos algorítmicos, se les reduce a meros tratamientos didácticos secuenciados y debidamente cronometrados. Es decir, se asume implícitamente que el objetivo de la clase de Matemáticas es la organización jerárquica de conceptos y procedimientos cuyo sentido es extraído desde y para la propia clase de Matemáticas. Se trata pues de organizar (secuenciar, articular, jerarquizar,…) una colección de objetos abstractos durante el curso de los años escolares de los estudiantes. Llamamos a este hecho: “la centración en el objeto” (Cantoral et al., 2015, p. 7).

Para ayudar a contrarrestar este tipo de prácticas disfuncionales, en el contexto de las necesidades más sentidas de la sociedad, emerge un programa de investigación científica con constructos teóricos significativos para favorecer la resignificación del conocimiento: la Socioepistemología.

La Socioepistemología permite describir y explicar la realidad educativa desde una perspectiva sistémica, donde las prácticas recurrentes del entorno son fundamentales para darle sentido a lo que hacen y no hacen los y las estudiantes en el salón de clases. Es decir:

> […]el método socioepistemológico es de naturaleza sistémica, pues permite tratar los fenómenos de producción y de difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple, al estudiar la interacción entre epistemología, dimensión sociocultural, procesos cognitivos asociados y mecanismos de institucionalización vía la enseñanza. Plantea el estudio del conocimiento, social, histórica y culturalmente situado (Cantoral, et al, 2015, p. 9).

La Socioepistemología es un marco teórico que estudia la enseñanza y el aprendizaje; esta heurística y lógica contextualizada se realiza a partir de las actividades humanas subyacentes en la construcción del conocimiento. La Socioepistemología no estudia objetos matemáticos independientes de las praxis humanas: "…la socioepistemología descentraliza al objeto matemático en cuestión y enfoca la atención en aquello que norma su construcción…" (Morales y Cordero, 2014, p. 326). Lo que norma la construcción, invención y descubrimiento del conocimiento son las prácticas sociales

3.1.1 *Prácticas sociales*

A la luz de la Socioepistemología, no hay comprensión y funcionalidad de las matemáticas sin la mediación de las prácticas sociales (Cantoral, 2013). La funcionalidad del conocimiento y saber matemático emergen de la heurística y la lógica de las prácticas sociales y de las prácticas recurrentes del entorno de los y las estudiantes. Es en las prácticas socialmente compartidas donde **—**también**—** está la génesis de los procesos básicos para resignificar el conocimiento (Arrieta y Díaz, 2015).

Por ejemplo, Ricardo Cantoral y otros investigadores presentan sus inferencias —a la luz de la Socioepistemología— de la heurística y la lógica de la construcción del saber matemático relacionado con la función exponencial: el caso de $f(x)=2^x$. Y concluyen:

> La representación gráfica, aun respetando las escalas y dibujándola con gran exactitud, no garantiza una comprensión de la trama interna de la misma, es hasta que se agrega una acción, una *práctica* concreta, proveniente del cúmulo de experiencias de los alumnos durante su vida, la de *medir* segmentos, lo que les permite en principio entender la naturaleza del crecimiento de la función 2^x. La representación no existe como tal hasta que algunas prácticas cotidianas como medir, comparar y observar son llevadas a cabo, son ejercitadas […] (Cantoral et al., 2006, p. 88).

Se insiste, no hay comprensión y resignificación del conocimiento sin práctica social. Es en el diálogo entre la subjetividad y objetividad humana donde emerge el entendimiento y la construcción del significado de los saberes matemáticos.

En resumen, según Cantoral (2013, p. 50), las prácticas sociales están constituidas por cuatro funciones específicas (Figura, 1): funciones normativa, identitaria, pragmática, discursiva.

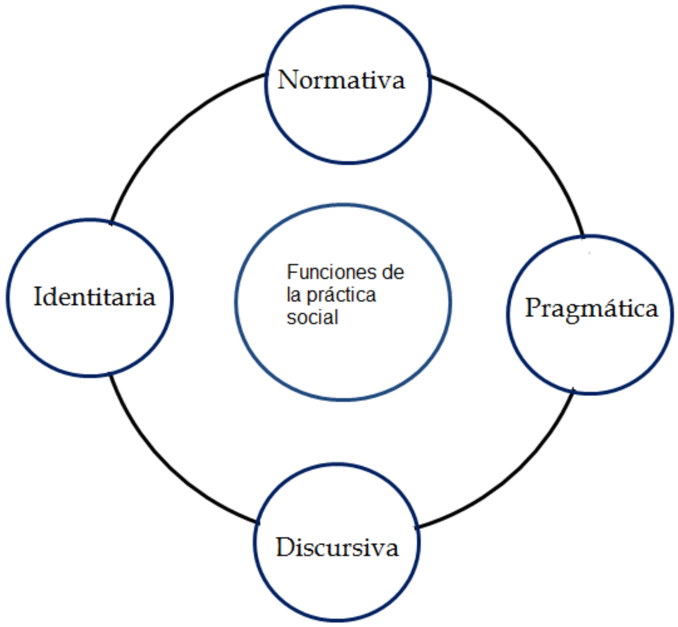


Figura 1. Funciones de la práctica social
Fuente: Cantoral (2013)

Las prácticas sociales emergen en los contextos socioculturales como parte de la dinámica social y cognitiva que se suscita en la explicación y transformación del entorno. En efecto, estas prácticas regulan, norman y permiten realizar acciones específicas e intencionales, donde el diálogo adquiere sentido en las comunidades y en las interacciones individuales que sintetizan la identidad de los participantes.

3.1.2 Resignificar el conocimiento matemático

Todos los conceptos básicos de la Socioepistemología tienen una función específica: hacer más inteligible la realidad relacionada con la construcción, invención, descubrimiento, difusión e institucionalización del conocimiento escolar.

El concepto resignificar permite explicar, interpretar y comprender el protagonismo del sujeto en el pasaje del conocimiento al saber, en la praxis educativa. "…La resignificación está articulada con los aspectos funcionales y del uso del conocimiento en cuestión…" (Morales y Cordero, 2014, p. 323). Resignificar el conocimiento, entonces, consiste en transformar el conocimiento en saberes funcionales en y con las actividades humanas; "…entendiendo la matemática funcional como un conocimiento incorporado orgánicamente en el humano que lo transforma y que le transforma su realidad, todo ello en oposición al conocimiento utilitario…” (Morales y Cordero, 2014, p. 327).

En la Socioepistemología, el concepto resignificar permite hacer inteligible el pasaje de lo abstracto a lo concreto; el pasaje de una explicación empírica a una explicación teórica de la realidad, en los dominios socioculturales. Más aún, la Socioepistemología busca algo específico:

> […] busca hacer una distinción de origen con respecto a la idea platónica que establece la prexistencia de los objetos y procesos matemáticos y que implica considerar la unicidad de sus significados. [Resignificar] emerge, entonces, como elemento para dar cuenta de que el conocimiento tiene significados propios, contextos, historia e intención; lo que señala la posibilidad de enriquecer el significado de los conocimientos en los marcos de los grupos humanos […] (Martínez, 2005, p. 200).

La epistemología genética, por ejemplo, descubrió que la existencia de los observables puros, de los conocimientos a priori sólo era una ilusión. En efecto, el sujeto necesita intervenir de forma directa —según sus conocimientos y sentimientos previos— a través de acciones intencionales y contextualizadas en la construcción y resignificación del conocimiento.

El ser humano tiene que intervenir de forma activa en la manipulación del conocimiento; esta manipulación, según la Socioepistemología, se hace en los límites de las prácticas sociales; es decir, el ser humano necesita un punto de referencia que regule y norme lo que hace y no hace para bien individual y social.

3.1.3 *La modelación como práctica social*

De acuerdo con los elementos empíricos epistemológicos que se describen más abajo, se infiere que la práctica social de modelación puede ser un medio para normar y resignificar los aprendizajes relacionados con la diferencial en el contexto escolar; un medio que permite enfocarse en prácticas contextualizadas; en efecto, el alumnado puede tener más protagonismo en la construcción del saber matemático.

De acuerdo con Arrieta y Díaz (2015), la modelación, en el ámbito de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, pasa por dos programas de investigación representativos. El primer programa se relaciona con la concepción clásica: la modelación es una representación de la realidad, por tanto, es un medio para aplicar las matemáticas; el segundo, permite conceptualizar la modelación como una praxis que promueve más la construcción, invención y descubrimiento del conocimiento. Para otros especialistas, la modelación matemática se relaciona con el sentido de realidad. Por ejemplo, Villa-Ochoa et al., (2010, p. 1094), concluyen que "…El *sentido de la realidad* a través de la modelación matemática apunta hacia esa necesidad de develar las matemáticas de los contextos socioculturales…". Más aún, la noción práctica social de modelación, en este documento, promueve el protagonismo de las prácticas recurrentes del entorno como visualizar, medir, predecir, etcétera. Estas prácticas están mediadas por elementos subyacentes que regulan lo que hace y no hacen los participantes en la construcción y comprensión del conocimiento. Así, la práctica social de modelación se relaciona más con el segundo programa de investigación que describe Arrieta y Díaz (2015), y con la propuesta de develar las matemáticas de los contextos socioculturales. Aunque la noción de práctica social de modelación busca comprender y construir el conocimiento en y con los contextos socioculturales y epistémicos.

En el contexto de la Socioepistemología, la modelación es más que un medio para representar la realidad, también es una heurística y una lógica contextualizadas en el desarrollo del conocimiento, de la comprensión y construcción de lo real a través de las matemáticas (Arrieta y Díaz, 2015). La modelación como práctica social permite articular el modelo con lo modelado, lo modelado con el modelo; donde los participantes tienen la oportunidad de participar en un diálogo epistemológico y ontológico significativo.

En la Socioepistemología, la modelación se conceptualiza e interpreta como una práctica social, una práctica que norma y promueve heurísticas en la construcción del conocimiento; una práctica o constructo teórico que permite estudiar y explicar el tránsito del conocimiento al saber a partir del entorno del estudiante, a partir de las prácticas de referencia socialmente compartidas. Así, la práctica social de modelación trasciende los límites de las prácticas de modelación, que se ven como medios para aplicar ciertos conocimientos, para ubicarse en una dimensión donde tiene la función de praxis epistemológica y ontológica; una praxis que institucionaliza y promueve significados funcionales en el desarrollo y la construcción del conocimiento: esto incluye el conocimiento cotidiano, el culto o técnico (Cantoral, 2013).

> Estudiar la práctica situada desde una perspectiva compleja nos centra en intenciones, procedimientos, herramientas, argumentos y sus procesos de emergencia y constitución. Estos seis elementos se relacionan con el por qué se hace, cómo se hace, con qué se hace, cómo se justifica y cómo es que la práctica llega a ser como es y qué horizontes plantea su devenir. Los cuatro primeros dan cuenta de la práctica situada, los dos últimos permiten explicaciones que trascienden el estar ahí, ubicando a la práctica en el tiempo. Es una práctica situada deviniendo en el tiempo (Arrieta y Díaz, 2015, p. 27).

Más aún, para Arrieta y Díaz (2015), la modelación como práctica social articula dos entidades: el modelo y lo modelado. El modelo y los procesos de modelado ayudan a resignificar el conocimiento no como algo a priori o independiente de las actividades humanas sino como una construcción intrínseca de la intervención objetiva y subjetiva de los sujetos.

> Una característica común de estas prácticas es que se interviene en una entidad a partir de otra. Se interviene en el corazón del paciente, en el componente electrónico, en la población de microrganismos y en una viga, a partir de gráficas, tablas de datos y ecuaciones. A esta característica común de estas prácticas le llamamos *el acto de modelar* […] (Arrieta y Díaz, 2015, p. 35)

En el contexto de las actividades humanas profesionales, el especialista interviene, interpreta, manipula, describe y comprende los procesos y resultados de acuerdo con métodos relacionados con su área profesional. Por ejemplo, el médico se apoya de componentes electrónicos que le permiten construir ciertas conclusiones, sobre un determinado objeto de estudio, a partir de supuestos teóricos y de su experiencia profesional.

Empero, en el salón de clases es difícil extrapolar la práctica social de modelación tal como se materializa en el seno de actividades humanas específicas; "…Lo que si 'transportamos' al aula es el acto de modelar, el cómo se han logrado construir los dipolos modélicos" (Arrieta y Díaz, p. 36). Es decir, interesa resignificar el conocimiento, en el contexto escolar, de acuerdo a los actos cognitivos y sociales; de acuerdo a la heurística y lógica de la práctica social de modelación y de las prácticas recurrentes del entorno (prácticas recurrentes como medir, modelar, predecir, explicar, argumentar, visualizar, localizar, graficar, estimar…).

4. UNA SOCIOEPISTEMOLOGÍA DE LA DIFERENCIAL

Con la intención de presentar elementos teóricos y empíricos epistemológicos que ayuden a resignificar la diferencial en el contexto escolar, se estudia grosso modo el desarrollo cognitivo y social de la diferencial a la luz de los supuestos básicos de la Socioepistemología. Así, esta socioepistemología de la diferencial se sintetiza en algunas de las aportaciones fundamentales de uno de los principales precursores del Cálculo: Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

4.1 Leibniz

Es difícil establecer con precisión la génesis epistemológica y científica de las investigaciones en torno a la diferencial. Por conveniencia, se construye esta socioepistemología de la diferencial a partir de algunas aportaciones de Leibniz; ya que en las investigaciones de este sabio se encuentra una síntesis, se puede decir, de las investigaciones y descubrimientos de la diferencial de las generaciones precedentes.

En los trabajos de Leibniz se puede inferir que la diferencial se construyó en un contexto geométrico. "…el Cálculo leibniziano se presentó generalmente en un contexto geométrico, aunque desde los primeros escritos de Leibniz se manifestó ya la potencialidad de la nueva herramienta para abordar y resolver problemas de Física" (Arcos, 2004, p. 79). Pero la construcción geométrica de la diferencial es consecuencia de ciertas prácticas intencionales. Leibniz perteneció a comunidades científicas y filosóficas que se ocuparon en construir explicaciones lógicas de la realidad. Este tipo de programas epistémicos influyeron en el quehacer de Leibniz (Bell, 2004).

Leibniz, al enfocarse más en las cuestiones analíticas de las matemáticas, heredó a las futuras generaciones un simbolismo que es funcional aún hasta nuestros días. Pero este simbolismo no es algo a priori sino es producto de las prácticas epistemológicas e históricas que han sesgado el desarrollo de la diferencial (Bell, 2004).

Las cuestiones socioepistemológicas que interesan en este apartado se insertan más en el contexto del descubrimiento; un contexto mediado por las prácticas sociales y las prácticas recurrentes del entorno. Los procesos de justificación y formalización son fundamentales en la construcción del conocimiento escolar pero estos procesos se llevan a cabo al final y no al principio; porque primero se inventa y construye, luego se formaliza (Kline, 2000). Y en el caso de la educación matemática, las y los estudiantes no representan comunidades de matemáticos o científicos ya hechos, más bien son seres humanos que asisten a la escuela con la intención de participar en la construcción y comprensión del conocimiento. De ahí la importancia de no descuidar los elementos en torno a la construcción social y cognitiva del saber.

4.1.1 *Triángulo característico*

Debido a la dificultad para comprender e interpretar las primeras ideas que publicó Leibniz de la diferencial, el texto que publicó L'Hôpital en 1696 se ha convertido en un punto de referencia en los estudios del desarrollo cognitivo de la diferencial de Leibniz (Cantoral, 1995). En efecto, en este estudio socioepistemológico, por lo general, aparecen interpretaciones de las explicaciones de L'Hôpital del cálculo de Leibniz.

Un elemento epistemológico fundamental en el desarrollo de la diferencial, en las investigaciones de Leibniz, es la noción de triángulo característico (un triángulo rectángulo infinitamente pequeño, Figura 2). Este tipo de triángulo emerge como consecuencia del estudio de las relaciones entre los elementos de las curvas poligonales, y las líneas tangentes a estas curvas en un punto dado. De acuerdo con L'Hôpital:

> […] las curvas al ser poligonales de una infinidad de lados […], y al diferir entre ellas sólo por la diferencia […] de los ángulos que estos lados infinitamente pequeños forman entre sí, el análisis de los infinitamente pequeños únicamente corresponde determinar la posición de estos lados para obtener la curva que de ellos forman, es decir, las tangentes de estas curvas, sus perpendiculares, sus puntos de inflexión o de retorno, los rayos que se reflejan, los que rompen, etcétera (citado por Luna, 2016, p. 14).

La explicación de L'Hôpital sintetiza la génesis ontológica y epistemológica del Cálculo en las investigaciones de Leibniz (Luna, 2016). Por tanto, el triángulo rectángulo infinitesimal no aparece como un constructo teórico epistemológico yuxtapuesto sino es el medio que articula las abstracciones más funcionales del cálculo de Leibniz: pendientes de las rectas tangentes, máximos y mínimos, puntos de inflexión.

El triángulo característico mRM, (Figura 2), no es idea original de Leibniz sino que fue tomado de los trabajos de sus predecesores; había sido utilizado anteriormente por Pascal y Barrow, cuyos trabajos había estudiado Leibniz (Kline, 2000). Sin embargo, en los estudios de Leibniz, el triángulo característico emerge como un elemento intrínseco que estimula y norma ideas relacionadas con el desarrollo de la diferencial. Estos actos de modelación se reflejan en los siguientes razonamientos.

> Sea una línea curva AM (Figura 2) tal que la relación de la abscisa AP a la ordenada PM, esté expresada por una ecuación cualquiera, y que se requiera trazar la tangente MT por el punto M dado sobre esta curva.

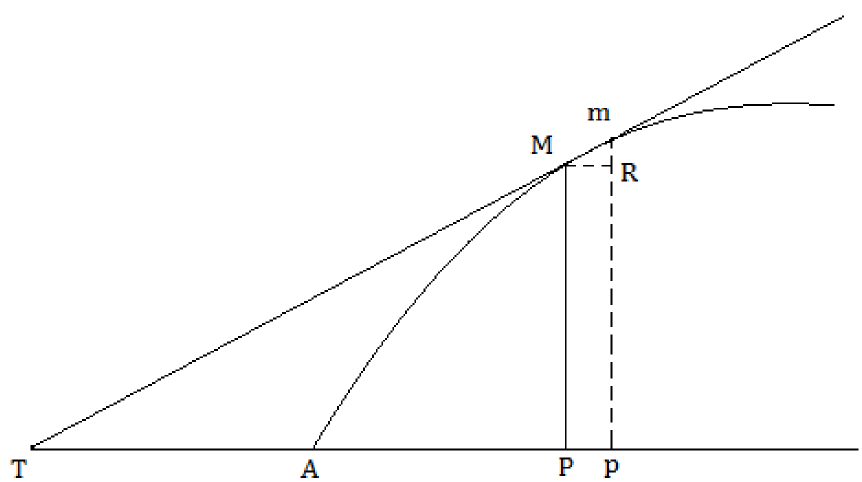


Figura 2. Recta tangente, en un punto dado, a la curva AM
Fuente: Cambray y Cantoral, (1990).

> Habiendo trazado la ordenada MP, y suponiendo que la recta MT que intersecta al diámetro en el punto T, es la tangente buscada, se concibe otra ordenada mp infinitamente cercana a la primera con una pequeña recta MR paralela a AP. Y al denominar a AP, x, y a MP, y, que están dados, (luego Pp ó $MR = dx$ y $mR = dy$) los triángulos semejantes mRM y MPT dará
> $mR : MR = MP : PT$ ó $dy : dx = y : PT$.

> Esto es, $PT = \frac{ydx}{dy}$
>
> Pues por medio de la diferencia de la ecuación dada, se encontrará un valor de dx en términos que estarán afectados todos por dy, el cual al ser multiplicado por y y dividido entre dy, dará un valor de la subtangente PT en términos completamente conocidos y libres de diferencias, el cual servirá para trazar la tangente buscada MT (Cambray y Cantoral, 1990, pp. 48-50).

En una interpretación moderna de los razonamientos de Leibniz, se puede enunciar que la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x)$, en el punto $P(a, f(a))$, está dado por $\frac{dy}{dx} = f'(a)$.

En los actos de modelación precedentes hay elementos ontológicos y epistemológicos específicos; el triángulo característico es algo intrínseco y funcional en el sistema geométrico; es difícil comprender y explicar los razonamientos de Leibniz, de la diferencial, sin el apoyo del triángulo característico. Para justificar y validar los actos de modelación el triángulo característico es un puente epistemológico entre los procesos de descubrimiento y los procesos de justificación o formalización.

En el estudio de máximos y mínimos (Figura 3) también emergen actos de modelación semejantes a los que aparecen en el cálculo de tangentes. El triángulo característico es la parte central de la práctica social que media en la construcción de significados funcionales de la diferencial; es decir, a través de este tipo de triángulo se articulan las cuatro funciones de la práctica social: normativa, pragmática, identitaria y discursiva (Cantoral, 2013).

El triángulo característico refleja las regulaciones epistemológicas de comunidades específicas de matemáticos y filósofos. También permite realizar ciertas acciones para explicar y describir de manera teórica el cambio. Este tipo de actos de modelación generan un conjunto de valores epistémicos para los partidarios del nuevo programa de investigación. En consecuencia, se revela un discurso matemático: explicaciones que permiten comprender desde otra perspectiva las matemáticas relacionadas con la diferencial.

Estando dada la naturaleza de la línea curva MDM, encontrar para AP un valor AE tal que la ordenada ED sea la mayor o la menor de sus semejantes PM.

Sea una línea curva MDM (Figura 3) tal que sus ordenadas PM, ED, PM sean paralelas entre sí, y tal que cuando la abscisa AP se incremente continuamente, la ordenada PM crezca hasta un cierto punto E después del cual disminuya, o al contrario, que disminuya hasta cierto punto E, después del cual crezca. Eso establece que la línea ED será denominada la mayor ordenada o la menor (Cambray y Cantoral, 1990, p. 56).

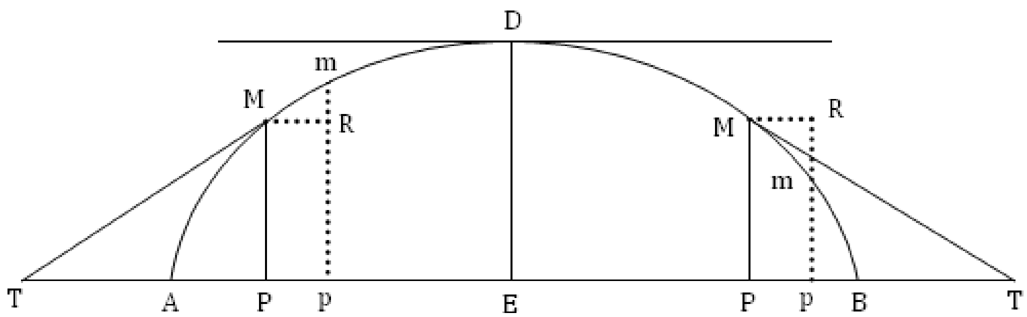


Figura 3. Curva ABD para visualizar la ordenada mayor y la ordenada menor
Fuente: Cambray y Cantoral, (1990)

Lo anterior, de acuerdo a la simbología y teoría actual, se puede interpretar de la forma siguiente. Si la función de la curva es $y=\sqrt{a^2-x^2}$; y se interpreta la derivada como un cociente de diferenciales. Con el apoyo de las reglas de derivación se tiene $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$. Por tanto el máximo o mínimo de la función se obtiene cuando $\frac{dy}{dx}=0$. Cuando el cociente de diferenciales tiende a cero, la ordenada adquiere su valor máximo o mínimo. En este caso, la ordenada adquiere su valor máximo cuando $x=0$.

4.1.2 *El desarrollo de la diferencial en el seno de las comunidades*

Leibniz perteneció a comunidades específicas: la comunidad de matemáticos y la comunidad de filósofos, por mencionar las más representativas de este sabio. Es decir, Leibniz realizó sus investigaciones en el mundo y no fuera de él. Leibniz construyó elementos ontológicos y epistemológicos de la diferencial en el contexto sociocultural; y estos contextos adquieren materialidad en las prácticas sociales y prácticas recurrentes. Por ejemplo, el concepto triángulo, en la evolución histórica y epistemológica del Cálculo, aparece en los trabajos de Arquímedes en la cuadratura de la parábola (Figura 4). Por tanto, en las investigaciones de Leibniz, el triángulo característico es parte de las prácticas sociales; prácticas que tienen su génesis en el conocimiento, en la sabiduría y las prácticas de las generaciones y comunidades precedentes.

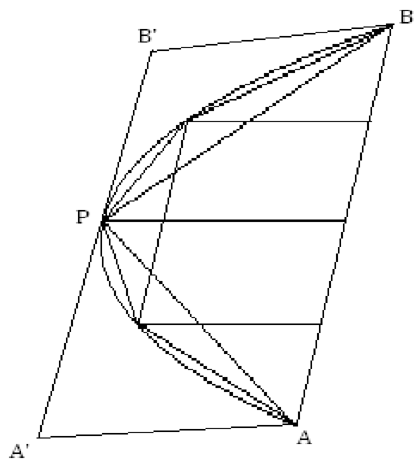


Figura 4: Cuadratura de la parábola

Fuente: Jiménez y López, (2012)

En efecto, Leibniz y todas las personas protagonistas en el desarrollo del Cálculo no se enfocaron en descubrir objetos matemáticos preexistentes.

> […] En la bibliografía actual, da la impresión, que de la nada, en un acto de creación inexplicable, obtuvieron el conocimiento tal como lo conocemos hoy en día. No obstante, cuando ellos inventaron "el nuevo Cálculo", como se le llamó en el siglo XVII a los trabajos de Newton con sus infinitesimales y de Leibniz con su concepto de diferenciales, ya existía un amplio bagaje de conocimientos que en aquella época constituían la vanguardia del saber (Jiménez y López, 2012, p. 111).

Leibniz al ser parte de una comunidad específica de sabios o matemáticos, sus investigaciones se ubicaron en el dominio de ciertas prácticas recurrentes o de referencia y en las prácticas sociales predominantes del entorno sociocultural. Porque es difícil que de la nada haya construido conocimiento matemático funcional (Bell, 2004).

Tal como describe o narra los hechos históricos la bibliografía predominante es un factor, pero al problematizar y explicar la construcción, invención y descubrimiento del conocimiento en el contexto escolar, es necesario ver en perspectiva la evolución epistemológica de éste; de acuerdo al paradigma socioepistemológico, es necesario enfocarse en las prácticas.

"…Y es que la ciencia es, como bien señalaba Einstein, 'tan subjetiva y psicológicamente condicionada como cualquier otra rama del empeño humano'" (Mlodinow, 2016, p.18). En el desarrollo del conocimiento en general hay factores internos y externos que condicionan el quehacer de los participantes o protagonistas.

En el caso de esta socioepistemología de la diferencial, interesa explicar los actos cognitivos y sociales que han condicionado y ayudado a construir unas matemáticas funcionales. Pero estos actos cognitivos y sociales emergen en el seno de las comunidades a través de ciertas prácticas humanas. Y la heurística de estas prácticas es el elemento teórico y empírico que apoya a la Socioepistemología para influir de forma constructiva en el rediseño del discurso escolar.

4.2 La práctica social se infiere

De acuerdo con Cantoral (2013, p. 19) "*La práctica social no se filma, se infiere*". Se infiere a la luz de los supuestos teóricos y epistemológicos de un determinado marco teórico; en este caso, la práctica social se infiere según los supuestos básicos de la Socioepistemología.

En el caso de la diferencial, en el contexto del Cálculo leibniziano, se puede decir que, una de las prácticas sociales que más influyó en la construcción de este conocimiento es la práctica social de modelación. En los razonamientos de Leibniz se infiere un diálogo epistemológico continuo entre el modelo y lo modelado; es decir, los procesos de modelación, de Leibniz, no son aplicaciones de la diferencial, más bien se busca construir significados y una lógica de la diferencial a través de estos procesos. Leibniz construyó modelos matemáticos y epistemológicos que le permitieron modelar el cálculo de tangentes y de máximos y mínimos, por ejemplo; y a la inversa: Leibniz realizó procesos de modelación para llegar a la construcción de modelos matemáticos. Se infiere, el diálogo entre el modelo y lo modelado se lleva a cabo en el seno de prácticas intencionales, donde uno de los principales elementos de articulación es el triángulo característico. Estos procesos matemáticos, ontológicos y epistemológicos convergen hacia el desarrollo de un conocimiento específico: la construcción de la diferencial en el seno de ciertas prácticas de modelación.

Con el apoyo de la práctica social de modelación (una práctica social que incluye prácticas recurrentes como visualizar, medir, deducir, explicar, argumentar, relacional, graficar, etc.) se puede decir que el alumnado —en el caso de la matemática escolar— tiene más oportunidades de resignificar el diferencial en el contexto del Cálculo.

Como vemos (o se infiere de la socioepistemología de la diferencial precedente), los razonamientos matemáticos en torno a la diferencial, "…se realiza en unos cuantos renglones, en cambio, con la presentación actual se requiere de una explicación y justificación muy elaborada que, por lo general, termina por confundir al estudiante, y, lo que es más grave, no favorece la comprensión…" (Arcos, 2004, p. 84). No favorece la comprensión de la diferencial en los contextos socioculturales.

En el discurso educativo tradicional, el alumnado "participa" en el descubrimiento de objetos matemáticos preexistentes; pero esta "participación" es pasiva; difícilmente los educandos tienen la oportunidad de resignificar el conocimiento matemático escolar en el seno de las prácticas sociales y de las prácticas recurrentes predominantes del entorno (Arrieta y Díaz, 2015).

4.3 Resignificar la diferencial

De acuerdo a los supuestos de la Socioepistemología y de los elementos empíricos epistemológicos inferidos en la socioepistemología de la diferencial, se diseñó una situación didáctica para ayudar a resignificar la diferencial en el contexto escolar. Este diseño se describe en 4.3.1, 4.3.2 y 4.3.3.

De la socioepistemología de la diferencial precedente se infiere una heurística subyacente. Esta heurística se inscribe en ciertos actos de modelación que le permitieron a Leibniz construir un saber matemático funcional. Estos actos de modelación no son preexistentes, más bien se llevan a cabo en el contexto de prácticas específicas: la práctica social de modelación y las prácticas recurrentes de las comunidades o del entorno sociocultural.

4.3.1 Actos de modelación para resignificar la pendiente de una recta

Estas prácticas de modelación le permiten al alumnado interactuar con el triángulo rectángulo en relación con la pendiente de la recta en el plano (Figura 5). Porque más adelante la relación de los elementos del triángulo rectángulo —en el estudio del cambio y del movimiento— con la pendiente de la recta permitirá al alumnado imaginar, visualizar, describir y explicar la funcionalidad del triángulo característico (el triángulo rectángulo infinitamente pequeño) en la resignificación de la diferencial.

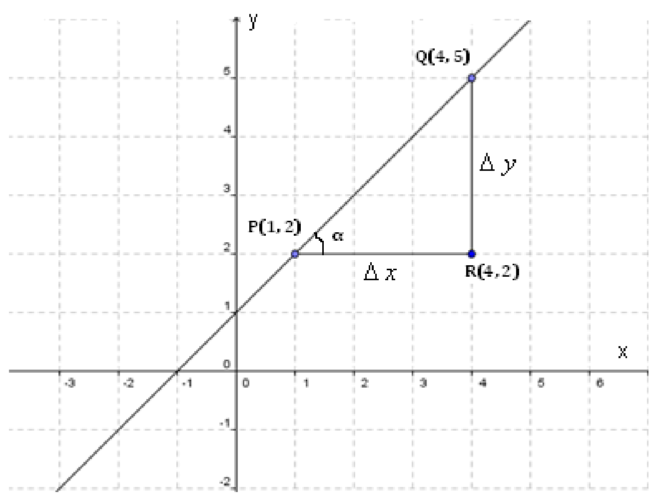


Figura 5. Representación geométrica de la pendiente de una recta.

Fuente: Autor

Estos actos de modelación tienen el objetivo de promover la construcción cognitiva y social de la relación entre la tangente del ángulo y la pendiente de la recta, en la interacción entre lo modelado y el modelo, entre el modelo y lo modelado. A través de los elementos del triángulo rectángulo, inherentes del sistema geométrico, se pretende que los educandos resignifiquen dichos conocimientos en un diálogo entre lo modelado y el modelo; es decir, estos procesos de modelación no se reducen a una aplicación de las matemáticas; más bien, se busca construir significados funcionales del conocimiento matemático en el seno de estos procesos.

***4.3.2** Actos de modelación para resignificar la velocidad promedio*

Una situación-problema de caída libre, se modela en el contexto físico y geométrico. Se plantea al alumnado la siguiente situación: "Para abordar el siguiente problema (relacionado con la velocidad promedio y la velocidad instantánea), se aplicará el hecho descubierto por Galileo hace cuatro siglos (Stewart, 1999), de que la distancia recorrida por cualquier cuerpo que cae libremente es proporcional al cuadrado del tiempo que ha estado cayendo. (En esto se desprecia la resistencia del aire). Si la distancia recorrida después de t segundos se denota con $h(t)$ y se mide en metros, entonces la ley de Galileo se expresa con la ecuación $h(t) = 4.9t^2$".

En esta etapa, se busca que el alumnado relacione los actos de modelación precedentes (véase 4.3.1) con el estudio de la velocidad promedio en el contexto físico y geométrico. Se propone lo siguiente.

Encuentre la velocidad promedio del objeto de $t_1 = 2$ a $t_2 = 4$ $(2 \le t \le 4)$ (ver Figura 6). Recuerde que la velocidad promedio es el cociente de la distancia recorrida y el tiempo transcurrido; es decir

$$velocidad\ promedio = \frac{distancia\ recorrida}{tiempo\ transcurrido} = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{4.9t_2^2 - 4.9t_1^2}{t_2 - t_1}$$

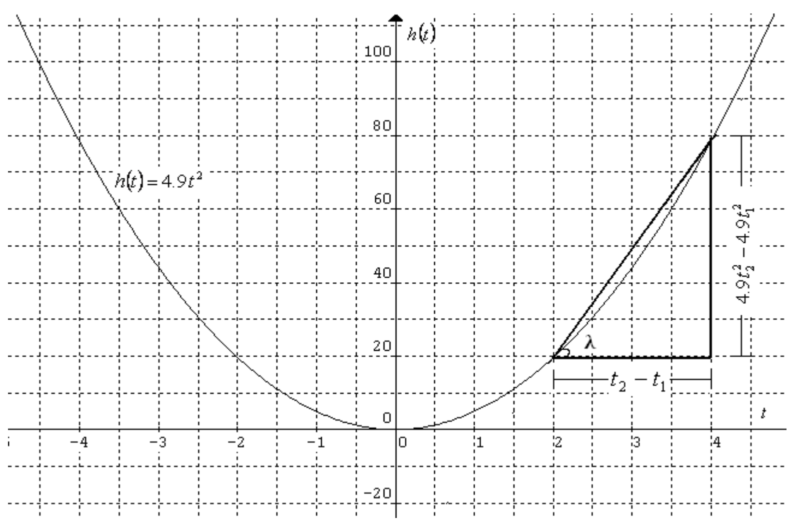


Figura 6. Curva para estudiar la velocidad promedio de un objeto que cae libremente.
Fuente: Autor

Para finalizar el estudio de la velocidad promedio y el concepto pendiente, se plantea el problema de calcular la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $(2, h(2))$ y $(4, h(4))$; y luego calcular la tangente del ángulo λ.

4.3.3 *Actos de modelación para resignificar la diferencial*

Con estos actos de modelación se busca construir los elementos básicos para resignificar la diferencial en el contexto geométrico y físico. Se hace una aclaración, al alumnado, para contextualizar la situación.

Con base en el descubrimiento de Galileo, la velocidad instantánea de un objeto esférico en cualquier instante está dada por la ecuación $v(t) = 9.8t$.

Entonces, es suficiente con sustituir $t = 4$ en la nueva ecuación para resolver lo planteado. Por tanto, $v(4) = 9.8(4) = 39.2\ m/s$; la velocidad instantánea es 39.2 metros por segundo en el instante $t = 4$.

Pero la intención es resignificar los símbolos dh, dt y del cociente formado por éstos: $\frac{dh}{dt}$. Para ello, se considera un punto infinitamente cercano a la coordenada $(4,\ h(4))$ (Figura 7). De acuerdo a lo construido en los actos de modelación precedentes, se construye un punto infinitamente cercano a la coordenada $(4,\ h(4))$ con la intención de relacionar estos puntos a través del concepto triángulo rectángulo. Este triángulo, al igual que los puntos o coordenadas indicados, es una construcción o visualización infinitamente pequeña. En este contexto, es necesario señalar que la variación o diferencia $(4 + dt) - 4$ es tan pequeña, que tiende a cero (por ejemplo, $1x10^{-100}$, es una cantidad que tiende a cero). Este cambio infinitamente pequeño en la variable independiente se representará, en adelante, con el símbolo dt; y el cambio en la variable dependiente, $h(4 + dt) - h(4)$, con el símbolo dh. Es decir, $(4 + dt) - 4 = dt, \quad h(4 + dt) - h(4) = dh$. Estas diferencias se pueden visualizar o representar en las longitudes de los catetos del triángulo rectángulo de la Figura 9; en adelante, este triángulo, se le denomina triángulo característico.

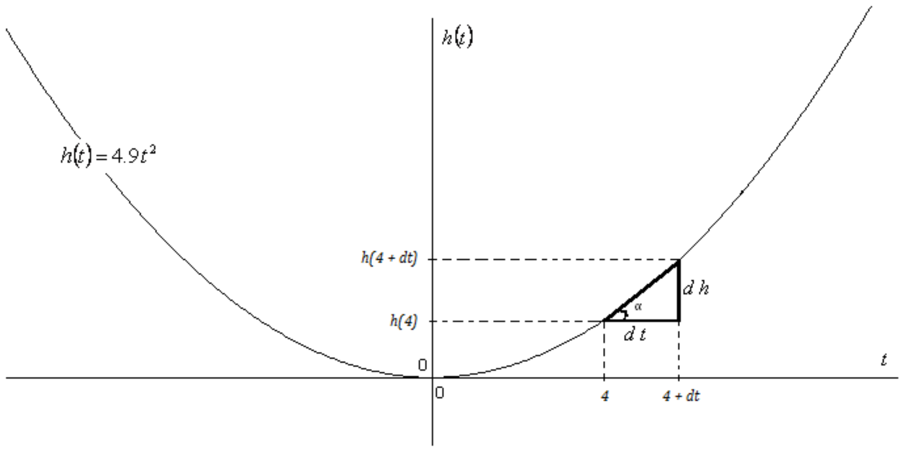


Figura 7. Curva para visualizar y estudiar la velocidad instantánea de un objeto, en un tiempo dado. Fuente: Autor

Figura 7, una curva que representa la función que modela la caída libre de un objeto esférico en un tiempo dado. En efecto, a partir de las condiciones de esta representación, se pretende promover actos de modelación que permitan generar una interacción significativa entre el modelo y lo modelado, entre lo modelado y el modelo; es decir, se espera que los participantes se apoyen de prácticas recurrentes como medir, predecir, explicar, estimar, contar, etcétera, en la resignificación de la diferencial. Para ello, a partir de lo resignificado en 4.3.2, se propone estimar la velocidad instantánea del objeto esférico en $t_1 = 4$.

En el contexto de esta situación, es necesario trabajar con cantidades infinitamente pequeñas, por ejemplo, con el valor $1x10^{-100}$ (con valores que tienden o cercanos a cero). Pero, por las limitaciones de las calculadoras más usuales en el salón de clases, es difícil trabajar con valores muy cercanos a cero. En efecto, en este caso, se sugiere estimar la diferencia $(4+dt)-4$, de tal suerte que esta variación sea igual a 0.00001; con esta diferencia se busca estimular actos de modelación que permitan construir una estimación que tienda al valor de la velocidad instantánea. La consideración de un valor cercano a cero, no se construye de acercamientos sucesivos; más bien se considera como una representación numérica concreta de la diferencial.

De acuerdo a las relaciones que se pueden construir a partir de los actos de modelación precedente y con el apoyo de la Figura 7, la velocidad instantánea del objeto en $t_1 = 4$ se puede sintetizar de la forma siguiente:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{h(4+dt) - h(4)}{4+dt-4}$$

Por tanto, cuando se considera un cambio o variación infinitamente pequeña en la variable independiente [en este caso, la variación o cambio es $(4+dt)-4 = 0.00001$, es decir, $dt = 0.00001$], se genera, en torno a la estimación de la velocidad instantánea de la caída libre del objeto esférico, el acto de modelación siguiente:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{h(4+0.00001) - h(4)}{4+0.00001-4} = \frac{4.9(4.00001)^2 - 4.9(4)^2}{0.00001} = \frac{0.00039200049}{0.00001} = 39.200049$$

Más arriba se señala que la velocidad instantánea del objeto esférico, en $t_1 = 4$ segundos, es $39.2\ {}^{m}\!/_{s}$. En efecto, la estimación que se obtiene de la velocidad instantánea en estos actos de modelación, a través de la resignificación de los símbolos dt y dh, se puede decir, tiende a 39.2; es decir, tiende a la velocidad instantánea de $39.2\ {}^{m}\!/_{s}$

En, y con estos actos de modelación, emerge una cuestión fundamental: ¿$\Delta t = dt$? En este documento, estos símbolos se resignifican en contextos específicos. En el contexto de la velocidad promedio, y de la pendiente de la recta secante a una curva, se resignifica (se construyen significados en prácticas específicas) el símbolo Δt. Y en el contexto de la velocidad instantánea y de la pendiente de la recta tangente en un punto dado de una curva, los actos de modelación convergen hacia la resignificación del símbolo dt. Es decir, en el contexto de resignificación del símbolo Δt, la variación o el cambio, que experimenta la variable independiente, puede ser 0.00001; pero este valor es algo puntual. En cambio en el contexto de los símbolos dt y dh, se usa 0.00001, porque las limitaciones de las calculadoras más usuales en el salón de clases no permiten hacer estimaciones con cantidades más pequeñas. Otro elemento fundamental. En el contexto de los símbolos dt y

dh, la diferencia 0.00001 se concibe como una variación o estimación que tiende a cero, no es un valor puntual.

Pendiente de la recta tangente

En estos actos de modelación se propone la siguiente situación: estimar el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $(4,\ h(4))$, (ver Figura 8).

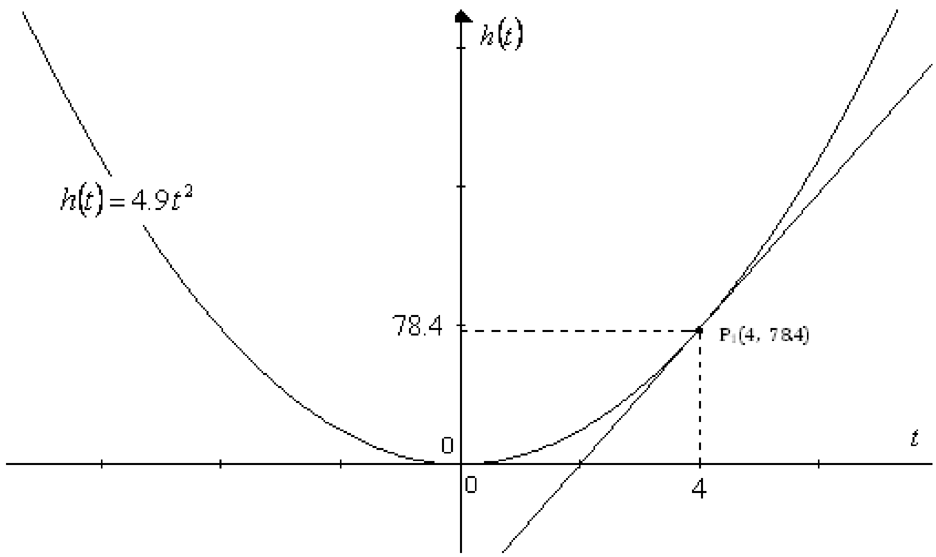


Figura 8: Recta tangente a la curva en un punto dado.
Fuente: Autor

La Figura 9, también, es un apoyo para resolver el problema de la recta tangente a la curva en una coordenada dada; este triángulo se tiene que construir como un medio para deducir el cambio que experimentan las variables, las cuales se pueden representar en la coordenada $[4+dt,\ h(4+dt)]$, que es una coordenada infinitamente cercana a la coordenada $(4,\ 78.4)$ (Figura 8). Y de acuerdo a las abstracciones construidas en los actos de modelación precedentes en relación al triángulo característico, se le recuerda al alumnado que dt representa una diferencia que tiende a cero, un valor cercano a cero; por lo que ya se ha explicado, en este caso, dt puede representar la diferencia 0.00001).

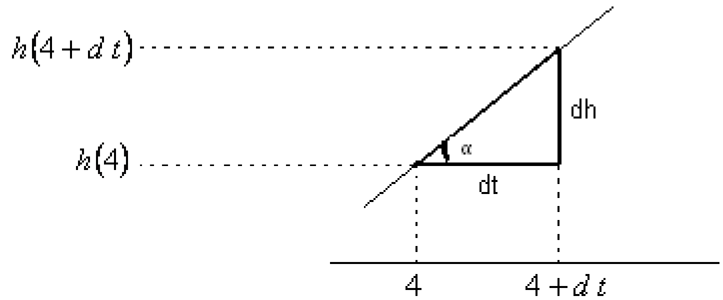


Figura 9: Triángulo característico
Fuente: Autor

Se supone que el alumnado podrá construir la relación siguiente:

$$m=\frac{dh}{dt}=\frac{h(4+0.00001)-h(4)}{4+0.00001-4}=\frac{4.9(4.00001)^2-4.9(4)^2}{0.00001}=\frac{0.00039200004\,9}{0.00001}=39.200049$$

Después de estimar el valor de la pendiente de la recta tangente en el punto dado, se plantean unas preguntas con la intención de relacionar lo construido, en torno a la resignificación de la diferencial. (Antes de pasar a las preguntas, el docente institucionaliza cómo se leen los símbolos dt y dh; el primero se lee “diferencial de la variable independiente”, el segundo, “diferencial de la variable dependiente”). Por ejemplo, ¿qué significado adquiere el cociente de diferenciales $\frac{d\,h}{d\,t}$ en el contexto físico (velocidad instantánea del objeto esférico en el instante *t*)?, ¿qué significados se pueden construir del cociente de diferenciales $\frac{d\,h}{d\,t}$ en el contexto geométrico (pendiente de la recta tangente a la curva en un punto P(*x*, *y*))?, ¿qué relaciones se pueden construir entre los símbolos *dt*, *dh*, $\frac{d\,h}{d\,t}$ y el triángulo característico, el triángulo infinitamente pequeño?

Se finaliza, la aplicación de la actividad didáctica, con un proceso intuitivo de formalización, un proceso que permitan relacionar lo resignificado con las práctica algorítmicas de la diferencial (Figura 14). Por tanto, los y las estudiantes participan en la siguiente actividad: “si el símbolo *dh* se le denomina diferencial de la variable dependiente, entonces, construya una explicación del significado del símbolo dt, que representa la diferencial de una variable independiente".

En esta actividad de enseñanza y aprendizaje se busca que el alumnado continúe profundizando en la resignificación de la diferencial de acuerdo a lo construido en los actos de modelación precedentes (véase 4.3.1, 4.3.2, 4.3.3). Donde las prácticas recurrentes como medir, visualizar, predecir, graficar, etcétera, tienen que ser fundamentales.

Por ejemplo, al proponer una generalización de la diferencial en el contexto geométrico o físico, se espera que el alumnado pueda inferir que todo diferencial con un exponente igual o mayor que dos puede ser despreciado. Ya que un diferencial con un exponente igual o mayor que dos es demasiado pequeño en comparación con una diferencial con exponente uno.

Resignificar la diferencial

En esta investigación se propone resignificar la diferencial a la luz de la Socioepistemología porque es una de las alternativas que promueve la participación del alumnado en y con los contextos socioculturales, en la construcción, invención y descubrimiento del conocimiento, del conocimiento matemático en particular.

En esta investigación se busca que el alumnado, primero, participe en la resignificación de la diferencial a través de prácticas humanas intencionales. Posteriormente se puede continuar profundizando en el diálogo entre la resignificación y la formalización del conocimiento con la mediación de prácticas de modelación.

En efecto, por último, con la intención de empezar a construir relaciones entre los actos de modelación precedentes y la formalización de la diferencial, se propone al alumnado calcular el cociente de diferenciales, $\frac{dy}{dx}$, de las siguientes funciones : $y = 3x^2 - 2x + 1$, $g(x) = x^2 + x$, $h(x) = 2x^2 - 2$.

4.3.4 *Participantes*

El diseño didáctico, para ayudar a resignificar la diferencial, se aplicó a cuatro estudiantes de la licenciatura en informática, primer semestre, de una universidad privada ubicada en Tuxtla Gutiérrez, Chiapas. Este grupo está conformado por seis estudiantes. El día de la aplicación del diseño didáctico asistieron cuatro estudiantes.

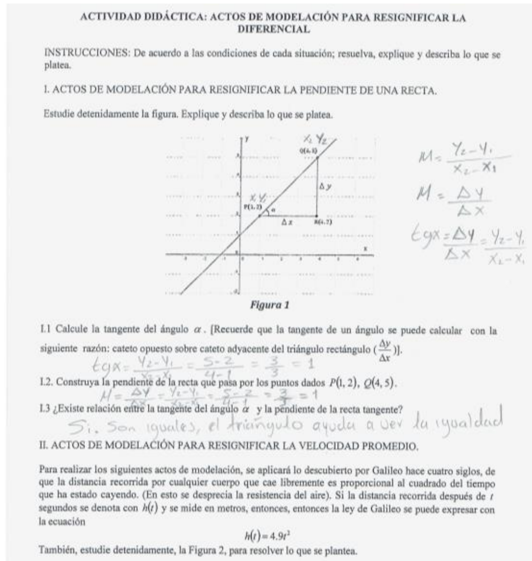
Los participantes se sentaron en sillas individuales, de forma circular. Entre cada silla había un espacio de 50 centímetros aproximadamente. A cada estudiante se le entregó una copia del diseño didáctico. Se resolvió la actividad didáctica en el salón de clases, en una sesión de dos horas, en horario de clases. Se observó y escuchó lo que el alumnado creó, reflexionó e inventó en torno a la resignificación de la diferencial. Se recolectaron los datos de forma escrita.

5. RESULTADOS

Los resultados se derivan de la aplicación de la actividad didáctica que se describe en 4.3; estos resultados se analizan de acuerdo a los supuestos básicos de la Socioepistemología. En efecto, en la resignificación de la diferencial, lo que interesa son las prácticas intencionales y las prácticas recurrentes como medir, predecir, explicar, describir, visualizar, etcétera; las cuales pueden ayudar a estimular y a regular los procesos de comprensión de este concepto matemático en el contexto escolar.

5.1 Actos de modelación para resignificar la pendiente de una recta y la velocidad promedio

En estos actos de modelación (los que se describen en 4.3) el alumnado participó continuamente. La intervención del profesor fue despreciable. La actividad se diseñó con la intención de que el docente interviniera lo menos posible (Figura 10). Luego, como los estudiantes se sentaron en sillas individuales, de forma circular, esto estimuló un intercambio de ideas significativas; además, los participantes están familiarizados con el concepto pendiente de una recta, y con el cálculo de la tangente de un ángulo dado.



ACTIVIDAD DIDÁCTICA: ACTOS DE MODELACIÓN PARA RESIGNIFICAR LA DIFERENCIAL

INSTRUCCIONES: De acuerdo a las condiciones de cada situación; resuelva, explique y describa lo que se platea.

I. ACTOS DE MODELACIÓN PARA RESIGNIFICAR LA PENDIENTE DE UNA RECTA.

Estudie detenidamente la figura. Explique y describa lo que se platea.

$M = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$M = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Figura 1

I.1 Calcule la tangente del ángulo α. [Recuerde que la tangente de un ángulo se puede calcular con la siguiente razón: cateto opuesto sobre cateto adyacente del triángulo rectángulo ($\frac{\Delta y}{\Delta x}$)].

$tg\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-2}{4-1} = \frac{3}{3} = 1$

I.2. Construya la pendiente de la recta que pasa por los puntos dados $P(1, 2)$, $Q(4, 5)$.

$M = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-2}{4-1} = \frac{3}{3} = 1$

I.3 ¿Existe relación entre la tangente del ángulo α y la pendiente de la recta tangente?

Si. Son iguales, el triángulo ayuda a ver la igualdad

II. ACTOS DE MODELACIÓN PARA RESIGNIFICAR LA VELOCIDAD PROMEDIO.

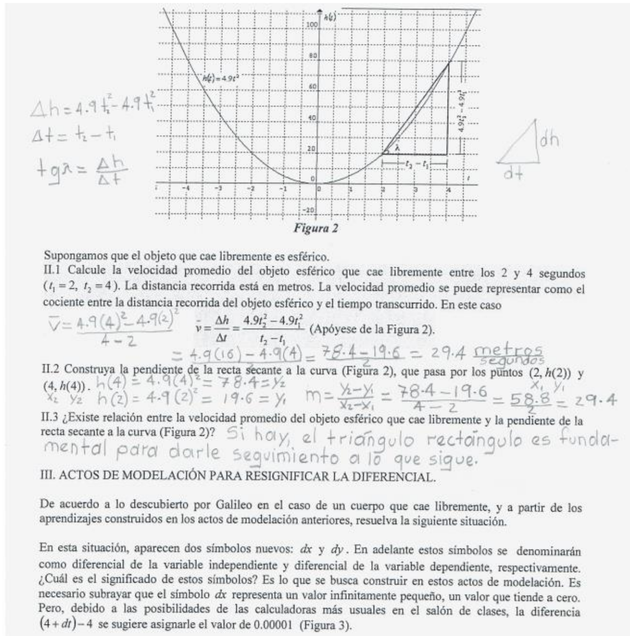
Para realizar los siguientes actos de modelación, se aplicará lo descubierto por Galileo hace cuatro siglos, de que la distancia recorrida por cualquier cuerpo que cae libremente es proporcional al cuadrado del tiempo que ha estado cayendo. (En esto se desprecia la resistencia del aire). Si la distancia recorrida después de t segundos se denota con $h(t)$ y se mide en metros, entonces, entonces la ley de Galileo se puede expresar con la ecuación

$$h(t) = 4.9t^2$$

También, estudie detenidamente, la Figura 2, para resolver lo que se plantea.

Figura 10. Actividad didáctica, hoja 1.
Fuente: Autor

En los actos de modelación para calcular la velocidad promedio, uno de los estudiantes escribe "…el triángulo rectángulo es fundamental para darle seguimiento a lo que sigue" (Figura 11). De esta explicación se infiere que el participante logró construir ciertas relaciones en torno al triángulo rectángulo que le permitieron comparar el concepto pendiente de una recta con la velocidad promedio. Estas construcciones no son el resultado del estudio de objetos matemáticos preexistentes. Más bien, en el intercambio de ideas, con los demás participantes, y a través de ciertos actos de modelación (como visualizar, imaginar, medir, estimar, etc.) el alumno construyó relaciones significativas entre la pendiente de la recta secante, y la velocidad promedio de la caída libre de un objeto esférico.



$\Delta h = 4.9t_2^2 - 4.9t_1^2$

$\Delta t = t_2 - t_1$

$tg\lambda = \frac{\Delta h}{\Delta t}$

Figura 2

Supongamos que el objeto que cae libremente es esférico.

II.1 Calcule la velocidad promedio del objeto esférico que cae libremente entre los 2 y 4 segundos ($t_1 = 2,\ t_2 = 4$). La distancia recorrida está en metros. La velocidad promedio se puede representar como el cociente entre la distancia recorrida del objeto esférico y el tiempo transcurrido. En este caso

$\bar{V} = \frac{4.9(4)^2 - 4.9(2)^2}{4-2}$ $\quad \bar{v} = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{4.9t_2^2 - 4.9t_1^2}{t_2 - t_1}$ (Apóyese de la Figura 2).

$= \frac{4.9(16) - 4.9(4)}{2} = \frac{78.4 - 19.6}{2} = 29.4\ \frac{\text{metros}}{\text{segundos}}$

II.2 Construya la pendiente de la recta secante a la curva (Figura 2), que pasa por los puntos $(2, h(2))$ y $(4, h(4))$. $h(4) = 4.9(4)^2 = 78.4 = y_2$

$h(2) = 4.9(2)^2 = 19.6 = y_1$ $\quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{78.4 - 19.6}{4-2} = \frac{58.8}{2} = 29.4$

II.3 ¿Existe relación entre la velocidad promedio del objeto esférico que cae libremente y la pendiente de la recta secante a la curva (Figura 2)? Si hay, el triángulo rectángulo es fundamental para darle seguimiento a lo que sigue.

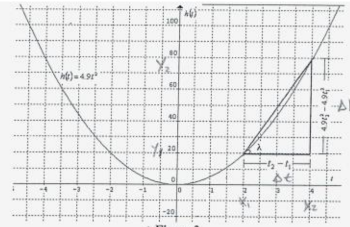
III. ACTOS DE MODELACIÓN PARA RESIGNIFICAR LA DIFERENCIAL.

De acuerdo a lo descubierto por Galileo en el caso de un cuerpo que cae libremente, y a partir de los aprendizajes construidos en los actos de modelación anteriores, resuelva la siguiente situación.

En esta situación, aparecen dos símbolos nuevos: dx y dy. En adelante estos símbolos se denominarán como diferencial de la variable independiente y diferencial de la variable dependiente, respectivamente. ¿Cuál es el significado de estos símbolos? Es lo que se busca construir en estos actos de modelación. Es necesario subrayar que el símbolo dx representa un valor infinitamente pequeño, un valor que tiende a cero. Pero, debido a las posibilidades de las calculadoras más usuales en el salón de clases, la diferencia $(4 + dt) - 4$ se sugiere asignarle el valor de 0.00001 (Figura 3).

Figura 11. Actividad didáctica, hoja 2
Fuente: Autor

Otro de los participantes concluyó, “me ayudó [el triángulo] a relacionar la velocidad [media] con la pendiente de la recta secante” (Figura 12). Construir relaciones, en la explicación de la realidad, en y con las matemáticas es un reto didáctico y epistemológico. Resignificar como un todo orgánico la pendiente de una recta secante y la velocidad promedio, por ejemplo, requiere de una intervención didáctica y epistemológica concreta. La explicación del participante puede ser un argumento a favor de la práctica social de modelación. En este caso, los educandos no estudian objetos matemáticos más bien aprende a construir relaciones matemáticas para explicar la realidad a partir de prácticas normadas e intencionales.



Δh

$t_2 - t_1$

Figura 2

Supongamos que el objeto que cae libremente es esférico.

II.1 Calcule la velocidad promedio del objeto esférico que cae libremente entre los 2 y 4 segundos ($t_1 = 2,\ t_2 = 4$). La distancia recorrida está en metros. La velocidad promedio se puede representar como el cociente entre la distancia recorrida del objeto esférico y el tiempo transcurrido. En este caso

$$\bar{v} = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{4.9t_2^2 - 4.9t_1^2}{t_2 - t_1} \text{ (Apóyese de la Figura 2).} = \frac{4.9(4)^2 - 4.9(2)^2}{4-2} = \frac{78.4 - 19.6}{2} = 29.4 \text{ m/s}$$

II.2 Construya la pendiente de la recta secante a la curva (Figura 2), que pasa por los puntos $(2, h(2))$ y $(4, h(4))$.

$$M = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{4.9t_2^2 - 4.9t_1^2}{t_2 - t_1} = \frac{h(4) - h(2)}{4-2} = 29.4$$ Es lo mismo

II.3 ¿Existe relación entre la velocidad promedio del objeto esférico que cae libremente y la pendiente de la recta secante a la curva (Figura 2)? Si, la figura me ayudó a relacionar la velocidad con la pendiente de la recta secante

III. ACTOS DE MODELACIÓN PARA RESIGNIFICAR LA DIFERENCIAL.

De acuerdo a lo descubierto por Galileo en el caso de un cuerpo que cae libremente, y a partir de los aprendizajes construidos en los actos de modelación anteriores, resuelva la siguiente situación.

En esta situación, aparecen dos símbolos nuevos: dx y dy. En adelante estos símbolos se denominarán como diferencial de la variable independiente y diferencial de la variable dependiente, respectivamente. ¿Cuál es el significado de estos símbolos? Es lo que se busca construir en estos actos de modelación. Es necesario subrayar que el símbolo dx representa un valor infinitamente pequeño, un valor que tiende a cero. Pero, debido a las posibilidades de las calculadoras más usuales en el salón de clases, la diferencia $(4+dt)-4$ se sugiere asignarle el valor de 0.00001 (Figura 3).

Figura 12. Actividad didáctica, hoja 2
Fuente: Autor

En efecto, en las prácticas recurrentes de modelación como visualizar, predecir, explicar, describir, etcétera, el alumnado tiene una alternativa para construir relaciones que pueden ayudar a resignificar algunos elementos fundamentales de la pendiente de una recta secante a una curva y de la velocidad promedio. Estas prácticas recurrentes promueven actos de modelación (diálogos entre los procesos de modelación y el modelo) donde el conocimiento matemático adquiere un sentido ontológico y epistemológico en y con los contextos socioculturales.

5.2 Actos de modelación para resignificar la diferencial

En esta sección, el docente sugirió a las y los estudiantes usar las ideas estudiadas en las prácticas de modelación anteriores (los actos de 5.1). En estos actos de modelación, primero se presenta el modelo matemático, de la caída libre de un objeto, descubierto por Galileo (como se describe en 4.3.2), esto permitió a los alumnos(as) saber con anticipación cuál era el valor numérico de la velocidad instantánea. Empero, se subraya que, la intención es construir significados de los símbolos *dt* y *dh*.

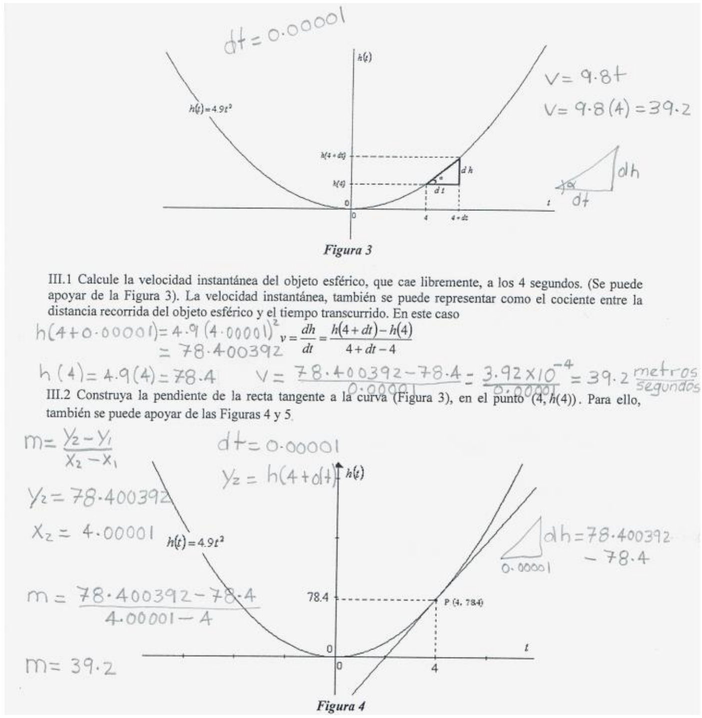
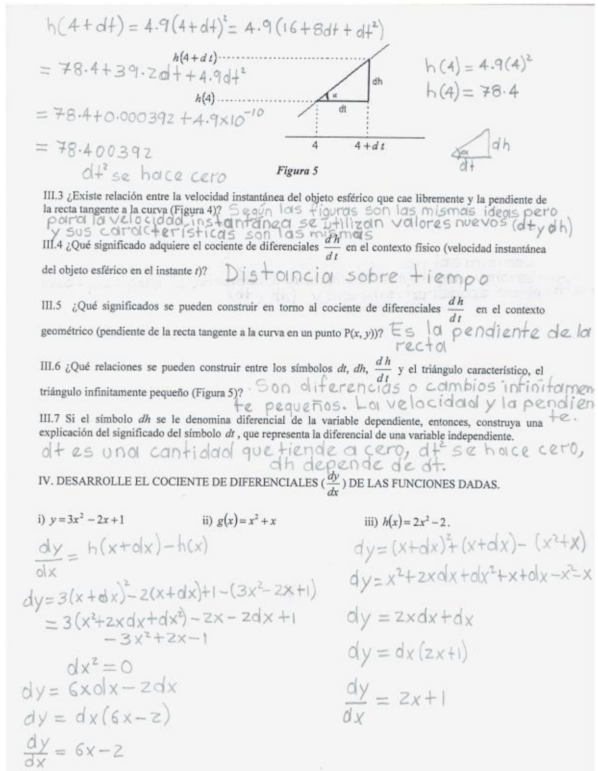


Figura 13. Actividad didáctica, hoja 3
Fuente: Autor

Así, a partir de los respectivos actos de modelación, una alumna afirmó que "son las mismas ideas [que estimula el triángulo rectángulo con respecto a las sesiones anteriores] pero para la velocidad instantánea se utilizan valores nuevos (dt y dh), y sus características son las mismas" (Figura 13 y 14). Se infiere, la alumna quiere decir que al igual que en las etapas anteriores, también tuvo la oportunidad de construir relaciones a partir de los elementos del triángulo rectángulo, en este caso del triángulo característico, en el contexto de ciertas prácticas que le permitieron pasar de lo abstracto a lo concreto.



$h(4+dt) = 4.9(4+dt)^2 = 4.9(16+8dt+dt^2)$

$= 78.4 + 39.2dt + 4.9dt^2$

$= 78.4 + 0.000392 + 4.9\times10^{-10}$

$= 78.400392$

dt^2 se hace cero

$h(4) = 4.9(4)^2$

$h(4) = 78.4$

Figura 5

III.3 ¿Existe relación entre la velocidad instantánea del objeto esférico que cae libremente y la pendiente de la recta tangente a la curva (Figura 4)? Según las figuras son las mismas ideas pero para la velocidad instantánea se utilizan valores nuevos (dt y dh) y sus características son las mismas

III.4 ¿Qué significado adquiere el cociente de diferenciales $\frac{dh}{dt}$ en el contexto físico (velocidad instantánea del objeto esférico en el instante t)? Distancia sobre tiempo

III.5 ¿Qué significados se pueden construir en torno al cociente de diferenciales $\frac{dh}{dt}$ en el contexto geométrico (pendiente de la recta tangente a la curva en un punto $P(x, y)$)? Es la pendiente de la recta

III.6 ¿Qué relaciones se pueden construir entre los símbolos dt, dh, $\frac{dh}{dt}$ y el triángulo característico, el triángulo infinitamente pequeño (Figura 5)? Son diferencias o cambios infinitamente pequeños. La velocidad y la pendiente.

III.7 Si el símbolo dh se le denomina diferencial de la variable dependiente, entonces, construya una explicación del significado del símbolo dt, que representa la diferencial de una variable independiente.

dt es una cantidad que tiende a cero, dt^2 se hace cero, dh depende de dt.

IV. DESARROLLE EL COCIENTE DE DIFERENCIALES ($\frac{dy}{dx}$) DE LAS FUNCIONES DADAS.

i) $y = 3x^2 - 2x + 1$ ii) $g(x) = x^2 + x$ iii) $h(x) = 2x^2 - 2$.

$\frac{dy}{dx} = h(x+dx) - h(x)$

$dy = 3(x+dx)^2 - 2(x+dx) + 1 - (3x^2 - 2x + 1)$

$= 3(x^2 + 2xdx + dx^2) - 2x - 2dx + 1 - 3x^2 + 2x - 1$

$dx^2 = 0$

$dy = 6xdx - 2dx$

$dy = dx(6x-2)$

$\frac{dy}{dx} = 6x - 2$

$dy = (x+dx)^2 + (x+dx) - (x^2+x)$

$dy = x^2 + 2xdx + dx^2 + x + dx - x^2 - x$

$dy = 2xdx + dx$

$dy = dx(2x+1)$

$\frac{dy}{dx} = 2x + 1$

Figura 14. Actividad didáctica, hoja 4
Fuente: Autor

En esta etapa de la actividad didáctica, el docente interviene de forma directa con la intención de promover diálogos ontológicos y epistemológicos en la construcción de significados de los símbolos Δt y dt. La afirmación de la alumna de que en estos actos de modelación se usan las mismas ideas que se aplicaron en las actividades precedentes (Figura 14), requieren de una intervención puntual del docente. Sobre todo, el alumnado se enfrenta con el reto de construir significados de la palabra tiende. El símbolo dx al ser un valor infinitamente pequeño, un valor que tiende a cero requiere de la construcción de nuevas concepciones. En el caso de los actos de modelación para resignificar el símbolo Δt (véase 5.1), el alumnado construye significados en el contexto de la pendiente de una recta o de una recta secante a una curva y en el contexto de la velocidad promedio (Figuras 10 y 12). El símbolo Δt representa un incremento o un cambio específico; este cambio no es infinitamente pequeño. En esta investigación el incremento Δt tampoco se estudia como acercamientos sucesivos. Más bien, este tipo de cambios se generan a través de magnitudes o valores finitos, de valores concretos. En contraste con el símbolo dt, donde los valores no son finitos sino infinitamente pequeños, ¿qué tan pequeños? Por las posibilidades que ofrecen las calculadoras más usuales en el salón de clases, en esta investigación, se sugiere concebir la diferencia como $x+dx-x=0.00001$; pero al alumnado se le explicó que esta diferencia tiende a cero. En efecto, esta tendencia, se tiene que visualizar, inferir, explicar y describir a partir de las ideas que emergen en la construcción de relaciones en torno al triángulo rectángulo infinitamente pequeño, denominado triángulo característico (Figuras 13 y 14).

Las prácticas de modelación propuestas en esta actividad permitieron la participación continua del alumnado en la resignificación de la diferencial. Se insiste, en los actos de modelación de 5.2, la intervención del docente fue más directa y constante. Y de acuerdo a lo resignificado por el alumnado, se puede decir que la diferencial tanto de la variable independiente como de la dependiente fueron concebidos como cambios infinitamente pequeños, que son fundamentales para estimar la velocidad instantánea y la pendiente de la recta tangente en un punto dado de una curva (Figura 14). Es decir, en estos actos de modelación el sentido o significado de la diferencial no es algo preexistente, al contrario, este concepto matemático se resignifica en actos sociales y cognitivos en el contexto de la práctica social de modelación; una práctica que se revela en prácticas recurrentes como estimar, visualizar, predecir, etcétera.

Otro descubrimiento que se logró en esta sección es sobre las diferenciales a la segunda potencia. Un estudiante afirmó que la expresión $4.9dt^2$ "…es un número imaginario y a la vez se desarrolla" (Figura 14). A la luz del desarrollo histórico de la diferencial, el estudiante tuvo la oportunidad de experimentar parte de los procesos y desequilibrios cognitivos que Leibniz enfrentó en su momento; por ejemplo, en la discusiones sobre el uso de la expresión $x+dx=x$, Berkeley fue uno de los filósofos que más criticó esta ecuación: no aceptaba el hecho de que una cantidad en un determinado contexto tuviese un valor infinitamente pequeño y en otro fuera cero.

Para concluir (5.3), los y las estudiantes resolvieron ejercicios propuestos con la intención de continuar profundizando en la relación de la resignificación de la diferencial y la formalización de este concepto matemático (Figura 14). Pero, a estas alturas, los símbolos

dt y dh han sido resignificados por los participantes en contextos específicos, a partir de actos de modelación.

En la práctica de una enseñanza tradicional, la enseñanza empieza por las definiciones, acto seguido, actividades procedimentales (Pulido 2010). Las definiciones tienen un papel fundamental en el desarrollo del conocimiento, pero estas construcciones es un final relativo, no es el principio en la comprensión y el desarrollo del conocimiento. De ahí la importancia de enfocarse, primero, en las prácticas en la comprensión y desarrollo del conocimiento.

En el caso de esta investigación, se propone fundamentar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la Socioepistemología. Este marco teórico es una alternativa que busca comprender y construir las matemáticas en y con el mundo. Esto implica pasar de los objetos y procesos preexistentes a las prácticas; esta nueva forma de concebir la construcción del conocimiento adquiere sentido a través del concepto resignificar. Es necesario que el alumnado participe en la resignificación del conocimiento; en efecto, las prácticas se convierten en unidades de análisis fundamentales en la construcción del conocimiento. En esta investigación, se propone resignificar el conocimiento en el contexto de prácticas recurrentes del entorno y de las comunidades epistémicas; este tipo de prácticas permiten llevar a cabo actos de modelación intencionales. Con y en este tipo de prácticas se puede construir, es decir, resignificar, relaciones —por ejemplo— que existe entre la diferencial y conceptos específicos: velocidad instantánea, pendiente de la recta secante y pendiente de la recta tangente a una curva. Todo esto puede ser normado por la práctica social de modelación, por aquellas convenciones y generalizaciones implícitas y explícitas que emergen como algo dinámico en la construcción del conocimiento en los contextos socioculturales y epistémicos.

6. CONCLUSIÓN

Se puede decir que, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas evolucionan en la tensión entre ciertas cuestiones epistemológicas: ¿las matemáticas se descubren o se construyen en los contextos socioculturales? ¿Las matemáticas es una construcción humana o es independiente de la mente humana?

Para algunos, las matemáticas están en el mundo platónico. En esta línea epistemológica, las matemáticas están constituidas por objetos preexistentes; el ser humano tiene que aprender a descubrir estos objetos, así como ha aprendido a descubrir las galaxias.

En esta investigación se presentan algunos resultados relacionados con la resignificación del conocimiento matemático en el contexto de ciertas prácticas de modelación. En efecto, se puede decir que las matemáticas escolares no están constituidas por objetos preexistentes. Las matemáticas son parte de la ontología y epistemología humana. Esta forma de concebir las matemáticas tiene efectos positivos en el caso de la enseñanza y el aprendizaje, de estas disciplinas, en la escuela o universidad: el alumnado tiene más oportunidades de participar en la construcción, invención y descubrimiento del conocimiento a partir de los saberes que ha construido (y continúa construyendo) en el dominio de prácticas sociales y prácticas recurrentes del entorno.

De acuerdo con los supuestos teóricos de la Socioepistemología, sería ingenuo afirmar que se puede resignificar el saber matemático a partir de objetos y procesos a priori. Al contrario, es necesario resignificar el conocimiento matemático en el contexto de ciertas prácticas. El ser humano está en y con el mundo (Freire, 2010). Por tanto, las matemáticas, también, es consecuencia del diálogo epistemológico y ontológico que llevan a cabo las personas en sus relaciones sociales y cognitivas con los demás y con la naturaleza en general. Es decir, las matemáticas también emergen de procesos o prácticas intencionales en contextos socioculturales específicos; y es en estos contextos donde, también, se problematiza la objetividad y significado de los conceptos matemáticos.

En una enseñanza tradicional, por lo general, la clase de matemáticas empieza con el dictado de definiciones. En este tipo de enseñanza el alumnado tiene pocas oportunidades de construir diálogos epistemológicos y ontológicos, en y con los contextos socioculturales y epistémicos, en la comprensión y construcción del conocimiento. Más aún, en el caso de la diferencial, es difícil construir o encontrar una definición universal.

> Para muchos puede resultar extraño que la respuesta a la pregunta ¿qué son los diferenciales? tenga como respuesta: “depende”. Pueden encontrarse definiciones actuales, esencialmente distintas, dependiendo del libro que se consulte e incluso de la región geográfica; con estas definiciones, el diferencial puede ser un incremento, una

> transformación lineal, un infinitésimo, una forma diferencial o una variable que se va a cero. Es importante mencionar que aunque esencialmente distintas, cada una de ellas captura un rasgo del estilo diferencial, o dicho de otra manera, un modo de percibir cierto rasgo del estilo diferencial […] aunque sólo sea un rasgo de ellos [de los diferenciales] que se captura, ha animado a algunos a creer que la pobreza de articulación entre la Física y la Matemática escolar puede resolverse cuando a los físicos se les haga ver que sus procedimientos extraños con los diferenciales pueden transparentarse y ser validados a través de definiciones precisas (Pulido, 2010, pp. 88-89).

De ahí la importancia de enfocarse, en el contexto escolar, en la resignificación del conocimiento matemático, en específico de la diferencial. El concepto resignificar, a la luz de la Socioepistemología, permite pasar de los objetos y procesos preexistentes a las prácticas, a los diálogos que permiten construir relaciones entre diferentes conceptos. En esta investigación se propone resignificar la diferencial de acuerdo a las prácticas recurrentes del entorno y de ciertas comunidades epistémicas; prácticas recurrentes como medir, estimar, explicar, etcétera; y estas prácticas, se supone, pueden estar normadas o reguladas por la práctica social de modelación. Por ejemplo, en el caso de la enseñanza y el aprendizaje de la diferencial, la práctica social de modelación emerge cuando el alumnado participa en actos de modelación; estos actos se llevan a cabo de acuerdo a ciertas regulaciones subyacentes en la construcción y comprensión del conocimiento; estas regulaciones pueden materializarse en el uso de gráficas, de ecuaciones o modelos matemáticos. ¿Por qué, por ejemplo, el plano cartesiano tiene una función importante para estudiar o comprender la velocidad instantánea? Porque el plano cartesiano se puede considerar como un elemento esencial que regula la construcción de significados relacionados con la diferencial.

En esta investigación no se propone estudiar la diferencial a través de definiciones o de objetos y procesos preexistentes. Más bien, su busca que el alumnado tenga la oportunidad de resignificar el conocimiento matemático; esto implica enfocarse en las prácticas, en prácticas intencionales. En el caso de la diferencial, en algunos textos los símbolos Δy, dx tienen el mismo significado, es decir, $\Delta x = dx$ (Pulido, 2010).

> Así, por ejemplo, si queremos hallar como varía la intensidad, I, de una onda plana al atravesar un medio, es decir, $I(x)$, siendo x la distancia atravesada por la onda en el interior del medio, desconocemos $I(x)$ y, por supuesto, también su derivada […] una estimación lineal del ΔI, al pasar de $x+\Delta x$, podría ser $dI = -\alpha I(x)dx$, que representa lo que valdría ΔI, a partir de x y en un dx (que es exactamente lo mismo que Δx y no tiene por qué ser pequeño) si la variación de I se produjera uniformemente, siempre al mismo ritmo, desde el comienzo del intervalo (Martínez et al., 2002, p. 280).

En los resultados que se presentan en esta investigación, para resignificar la diferencial, con los símbolos Δx, dx no se resignifica lo mismo; para resignificar la diferencial se proponen representaciones y ecuaciones (véase 4.3.1, 4.3.2, 4.3.3). Estas representaciones y ecuaciones se pueden considerar como objetos y procesos preexistentes; pero en el contexto de la práctica social de modelación, las ecuaciones y representaciones se pueden ver como elementos subyacentes que regulan los actos de modelación que realiza el ser humano para construir significados específicos, en este caso, significados de la diferencial. Esta forma de concebir el conocimiento matemático promueven actos de modelación y heurísticas que pueden ayudar a construir aprendizajes con y a partir de los conocimientos previos del alumnado; de los conocimientos previos que se construyen en el contexto de las prácticas humanas como medir, inferir, explicar, etcétera.

Otra de las propuestas —para resignificar la deferencial— está en considerar el triángulo característico (véase 4.3.3) como un elemento subyacente que regula los actos de modelación en la construcción de significados relacionados con la diferencial. De acuerdo con los resultados de la aplicación de la actividad didáctica (véase 5), se puede decir, que los participante encontraron un apoyo significativo, en un primer momento, en el triángulo rectángulo, luego en el triángulo característicos. Se insiste, estas representaciones geométricas no se consideran como algo a priori sino como medios que regular la construcción y comprensión de significados en torno a la diferencial.

Así, en contraste con la enseñanza tradicional que se enfoca en las definiciones o en los objetos matemáticos, esta propuesta, para resignificar la diferencial, se fundamenta en las prácticas. Se puede decir que las prácticas humanas son componentes ontológicas y epistemológicas en la comprensión y construcción del conocimiento, de forma específica en la comprensión y construcción del conocimiento escolar. Por eso, los elementos subyacentes, que regular los actos de modelación en la resignificación de la diferencial, se consideran fundamentales para promover un mayor protagonismo del alumnado en la enseñanza y el aprendizaje de este conocimiento matemático.

REFERENCIAS

Arcos, J. (2005). Incremento, diferencial y aproximación lineal. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 18*. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/5945/1/ArcosIncrementoAlme2005.pdf

Arcos, J. (2004). Rigor o entendimiento, un viejo dilema en la enseñanza de las matemáticas: el caso del cálculo infinitesimal. *Tiempo de Educar, Revista Interinstitucional de Investigación Educativa*, 5(010), 77-110. Recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/311/31101004.pdf

Arrieta, J. y Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la Socioepistemología. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 18(1), 19-48. Recuperado de http://www.clame.org.mx/relime.htm

Bachelard, G. (2007). *La formación del espíritu científico. Contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo.* México. Siglo XXI.

Bell, E. (2004). *Historia de las matemáticas*. México. Editorial FCE.

Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural.* México. Paidós.

Camacho, A. (2006). Socioepistemología y prácticas sociales. *Revista Educación Matemática*, 18 (001), 133-160.

Cambray, R. y Cantoral, R. (1990). *Lecciones de cálculo antiguo*. Sección de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Cantoral, R.; Montiel, G.; Reyes-Gasperini, D. (2015). El programa socioepistemológico de investigación en Matemática Educativa: el caso de Latinoamérica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 18(1), 5-17. Recuperado de http://www.clame.org.mx/relime.htm

Cantoral, R.; Reyes-Gasperini, D.; Montiel, G. (2014). Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(3), 91-116. Recuperado de http://www.revista.etnomatematica.org/index.php/RLE/article/view/149/161

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. México: Gedisa.

Cantoral, R.; Farfán, R.; Lezama, J.; Martínez, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Número Especial, 83-102.

Cantoral, R.; Farfán, R. (2004). *Desarrollo conceptual del cálculo*. México. Editorial Thomson.

Cantoral, R. (1995). Acerca de las contribuciones actuales de una didáctica de antaño: el caso de la serie de Taylor. *MATHESIS, filosofía e historia de las ciencias matemáticas*, 11(01), pp. 55-101.

Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 08(03), pp. 265-286.

Freire, P. (2010). *Pedagogía del oprimido*. México. Siglo XXI.

García, R. (2000). *El conocimiento en construcción*. *De las formulaciones de Jean Piaget a la teoría de sistemas complejos*. España. Editorial Gedisa.

Jiménez, J.; López, J. (2012). Evolución del cálculo en los siglos XVII y XVIII. *Revista Multidisciplina*, *Núm*. 12, 110-127. Recuperado de http://www.revistas.unam.mx/index.php/multidisciplina/article/view/35275/32137

Kline, M. (2000). *Matemáticas. La pérdida de la certidumbre*. México. Siglo XXI.

Martínez, G. (2005). Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 08(02), 195-218.

Martínez, J.; López, G.; Gras, A.; Torregosa, G. (2002). *La diferencial no es un incremento infinitesimal. Evolución del concepto de diferencial y su clasificación en la enseñanza de la física.* Recuperado de http://www.agm.cat/recerca-divulgacio/la_dif_no_es-1_Incremento.pdf

Morales, A. y Cordero, F. (2014). La graficación-modelación y la serie de Taylor. Una sociepistemología del Cálculo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(3), 319-345. Recuperado de http://www.clame.org.mx/relime.htm

Mlodinow, L. (2016). *Las lagartijas no se hacen preguntas. El apasionante viaje del hombre desde la vida en los árboles hasta la comprensión del cosmos*. México. Editorial Crítica.

Luna, F. (2016). La unidad de opuestos en Leibniz. *THÉMATA, Revista de Filosofía*, Núm. 53, pp. 13-30.

Piaget, J. (1990). *La equilibración de las estructuras cognitivas. Problema central del desarrollo*. México: Editorial Siglo XXI.

Pulido, R. (2010). La enseñanza de los diferenciales en las escuelas de ingeniería desde un enfoque socioepistemológicos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 13(04), 85-97. Recuperado de file:///C:/Users/user/Downloads/Dialnet-LaEnsenanzaDeLosDiferencialesEnLasEscuelasDeIngeni-4064083.pdf

Pulido, R. (1998). *Un estudio teórico de la articulación del saber matemático en el discurso escolar: La transposición didáctica del diferencial en la física y la matemática* (Tesis de doctorado, no publicada). Cinvestav-IPN. México.

Salinas, P. y Alanís, J. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del Cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 12(3), 355-382.

Salinas, P.; Alanís, J.; Pulido, R.; Santos, F.; Escobedo, J.; Garza, J. (2005). *Elementos del cálculo. Reconstrucción conceptual para el aprendizaje y la enseñanza*. México. Editorial Trillas.

Stewart, J. (1999). *Cálculo. Concepto y contextos.* México. Editorial Thomson.

Villa-Ochoa, J.A.; Bustamante, C.; Berrío, M. (2010). Sentido de realidad en la modelación matemática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 23,* (pp. 1087-1096) México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa, A. C. Recuperado de http://clame.org.mx/uploads/actas/alme23.pdf